■ Weinstock 著 ■ ■ 顏晃徵 譯述 ■

變分法應用之一例

變分法在理論物理上是極重要的數學技術之一，在力學、彈性學、光學及量子力學裡有很廣泛的應用。事實上 Schroedinger 微分方程的起源與變分法頗有關係。下面是應用變分法以求某種容電器電容的方法；其中所要求的數學知識並不很多，相信二年級的同學都能看懂，一年級也應該試試。其中有關變分法的部分（即§.o 的兩個定理）可以參考 Courant 的微積分下冊，或 Goldstein 的古典力學。

§.o 已知存在有一個函數 $y=y(x)\ \varepsilon\ C^2$, 而 $y(x_1)=y_1, y(x^2)=y_2$, 能使積分 $I=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')$ 達於極值，則 $y(x)$ 必滿足 Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=O \qquad (1)$$

再稍爲推廣，可得：

如 $w=w(x,y,z)\ \varepsilon C^2$, 且在R的邊界面B上 $w(x,y,z)$=預定函數，w能使 $\int_R f(x,y,z,w_x,w_y,w_z)\,dx\,dy\,dz$ 達於極值，則w 必滿足

$$\frac{\partial f}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial w_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial w_y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial w_z}\right)=O \qquad (2)$$

§.1 爲方便計可視導體爲一物體，其上各點之靜電位恒相同者。設有兩個封閉的導體面 B_1, B_2。B_1 完全被包含在 B_2 之內（例如一大一小的同心球面等等），則 B_1, B_2 構成一個容電器，其電容（定義）爲

$$C=\frac{1}{4\pi(\phi_2-\phi_1)^2}\int_R(\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2)\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{4\pi(\phi_2-\phi_1)^2}\int_R|\nabla\phi|^2dV$$

其中 ϕ_1,ϕ_2 各爲 B_1,B_2 上之電位，$\phi=\phi(x,y,z)$ 爲 B_1B_2 所夾的空間R中的電位。

靜電場內每單位體積的位能 $=\frac{1}{8\pi}|E|^2=\frac{1}{8\pi}|\triangle\phi|^2$

$$\therefore 總位能\ W=\frac{1}{8\pi}\int_R|\nabla\phi|^2dV$$

但一個系統若恒能保持穩定平衡，則其位能必達最小值，$\therefore\delta W=O$, 以 $w=\phi$, $f=\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2$ 代入(2)中可得

$\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}=0$ or $\nabla^2\phi=0$ 此爲 Laplace方程。

電容C由定義恰與總位能W成正比，而實際上W又在其最小值，故得：

■定理一：

$$實際電容C_o=\inf\left\{\frac{1}{4\pi(\phi_2-\phi_1)^2}\int_R|\nabla\phi|^2dv \;\middle|\; \phi\varepsilon C^2,\ \phi=\phi_n \text{ on } B_k\right\}\ k=1,2$$

式中的 ϕ 不必爲實際電位，只要能滿足 $\phi\ \varepsilon\ C^2$ 及 $\phi=\phi_k$ on B_k 即可。當然在 ϕ =實際電位時，所得的就是實際電容 C_o。此定理可用來計算電容的近似値。

§.2 今考慮某些封閉面 $u(x,y,z)=A$ 的集合，$u\varepsilon C^1$, B_1,B_2 也在其中，即 $u(x,y,z)=u_1$ on B_1, $u(x,y,z)=u_2$ on B_2, $u_2>u_1$。又通過R中任一點必有一個且僅有一個面 $u(x,y,z)=A$，並且有這種性質：若 $A_1<A_2$，則封閉面 $u=A_1$ 必完全被包在封閉面 $u=A_2$ 之內。爲便於想像這種集合，假設有一個氣球，其原來的位置形狀爲 B_1，然後加以充氣，逐漸連續地張大，終於達到 B_2 的形狀位置。在此過程中所有氣球面就構成上述的集合。此種函數u確實存在，可以證明。適當地選擇一個函數G, 令 $\phi=G(u)$, $G(u_1)=\phi_1$, $G(u_2)=\phi_2$ （由此可見 $u(x,y,y)=Const$ 相當於一個等位面，但不必爲實際上的等位面，蓋如果已找到了實際上的等位面則問題已不復存在。）

$$\phi_x=G'(u)u_x,\ \phi_y=G'(u)u_y,\ \phi_z=G'(u)u_z$$

$$則I=\int_R|\nabla\phi|^2\nabla dV=\int_R[G'(u)]^2|\nabla u|^2dV$$

今爲改換變數，再補充二函數 $v(x,y,z)\varepsilon C^1$, $w(x,y,z)$, 通過R中每一點有一個且僅有一個 $v=Const$，同時有一個且僅有一個 $w=Const$， $v_1\leqq v\leqq v_2$, $w\leqq w_1\leqq w_2$ 則可改變座標系 $u=u(x,y,z)$ 等

$\longrightarrow\ x=x(u,v,w)\quad y=y(u,v,w).\ z=z(u,v,w)$

$$則I變成\ I=\int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1}^{v_2}\int_{w_1}^{w_2}[G'(u)]^2(u_x^2+u_y^2+u_z^2)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dw\,dv\,du=\int_{u_1}^{u_2}[G'(u)]^2H(u)du$$

$$其中H(u)=\int_{v_1}^{v_2}\int_{w_1}^{w_2}(u_x^2+u_y^2+u_z^2)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dw\,dv$$

可證明與u,v之選擇無關。對此選定的u求I的極小値。$\therefore\delta I=o$ 以 $y=G(u)$ 及 $f=[G'(u)]^2H(u)$ 代入(1)中，

$$\frac{\partial f}{\partial G}-\frac{d}{du}\left[\frac{\partial f}{\partial G'}\right]=o$$

$$\therefore\frac{\partial f}{\partial G'}=Const\qquad G'H=c_1$$

$\therefore G(u)=c_1\int_{u_1}^{u}\frac{du}{H(u)}+c_2$ 但因 $G(u_1)=\phi_1$，$G(u_2)=\phi_2$ 代入其中可決定出 c_1, c_2：

$$c_2=\phi_1,\quad c_1=\frac{\phi_2-\phi_1}{\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{H(u)}},\qquad \therefore HG'^2=\frac{c_1^2}{H}$$

$$=\frac{(\phi_2-\phi_2)^2}{H\left[\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{H(u)}\right]^2}$$

$$C(u)=\frac{1}{4\pi(\phi_2-\phi_1)^2}\int_{u_1}^{u_2}G'^2H\ du$$

$$=\frac{1}{4\pi\left[\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{H(u)}\right]}\geqq Co$$

如欲使C接近Co，則須選擇適當的 u。如果恰巧選到 $u(x,y,z)$ Const 正好就是實際上的等位面時則 $C=Co$

§.3例：求二相似橢球 $u=u_1, u=u_2$ 之間的電容。但

$u=\sqrt{x^2+y^2+\alpha^2z^2}$，$\alpha>o$，$u_2>u_1$

在碰到上類的形式時，通常我們最拿手的僅僅是 $\alpha=1$ 的情形。此時 $u=u_1$ 及 $u=u_2$ 爲二同心球面，於是就不免想用球座標了：$x=u\sin v\cos w$, $y=u\sin v\sin w$, $z=u\cos v$

但由 $\alpha=1\longrightarrow\alpha\neq1$，就相當于在u中由 $z\longrightarrow\alpha z$，故決定採用 $x=u\sin v\cos w$, $y=u\sin v\sin w$, $z=\frac{u}{\alpha}\cos v$

$$u_1\leqq u\leqq u_2,\quad o\leqq v\leqq\pi,\quad o\leq w<2\pi$$

則 $u_x^2+u_y^2+u_z^2=\frac{x^2+y^2+\alpha^4z^2}{u^2}=\sin^2v+\alpha^2\cos^2v$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\sin v\cos w & \sin v\sin w & \frac{1}{\alpha}\cos v\\ u\cos v\cos w & u\sin v\sin w & -\frac{u}{\alpha}\sin v\\ -u\sin v\sin w & u\sin v\cos w & o\end{vmatrix}=\frac{u^2}{\alpha}\sin v$$

$$\therefore H(u)=\frac{u^2}{\alpha}\int_o^{\pi}\int_o^{2\pi}(\sin^2v+\alpha^2\cos^2v)\sin v\ dwdv$$

$$=\frac{4\pi}{3\alpha}(2+\alpha^2)u^2$$

$$\therefore\int_{u_1}^{u}=\frac{3\alpha}{4\pi(2+\alpha^2)}\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u}\right)$$

由 $G(u)=\text{const}\cdot\int_{u_1}^{u}\frac{du}{H(u)}+\text{const}$ 得 $\phi=G(u)=$

$$=\frac{\phi_2-\phi_1}{u_2-u_1}\cdot\frac{u_1u_2}{u}+\frac{u_2\phi_2-u_1\phi_1}{u_2-u_1}$$

$$\text{又}C=\frac{1}{4\pi\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{H(u)}}\geqq Co$$

$$\therefore C=\frac{2+\alpha^2}{3\alpha}\cdot\frac{u_1u_2}{u_2-u_1}\geqq Co \tag{3}$$

§.4 ■定理二：

$$Co=\sup\left\{\frac{1}{4\pi(\phi_2-\phi_1)^2}\int_R|\nabla\Psi|^2dV\ \middle|\ \nabla^2\Psi=o,\ \int_B(\phi-\Psi)\frac{\partial\Psi}{\partial n}dS=o\right\}$$

式中之B爲R之邊界面，即 B_1, B_2，又面積分內之 ϕ 中當然是指 B_1, B_2 上之電位 ϕ_1, ϕ_2，$\frac{\partial\Psi}{\partial n}$ 則指沿著B的向外法線的導函數——在 B_2 上此法線刺穿 B_2 透到 B_2 外，在 B_1 上此法線則刺入 B_1 內部。證明如下：

令 ϕ 爲實際電位，則 $\nabla^2\phi=o$，$\phi=\phi_k$ on B_k $(k=1,2)$

$$\text{且 }Co=\frac{1}{4\pi(\phi_2-\phi_1)^2}\int_R|\nabla\phi|^2dV$$

令Ψ爲任何一個合於定理中所述條件的函數，設 $Q=\phi-\Psi$ 則 $\nabla^2\Psi=o$，$\int_B Q\frac{\partial\Psi}{\partial n}dS=o$ 今 $\phi=\Psi+Q$

$$\therefore4\pi(\phi_2-\phi_1)^2Co=\int_R|\nabla\phi|^2\ dV$$

$$=\int_R|\nabla\Psi|^2dv+\int_R|\nabla Q|^2dV+2\int_R\nabla\Psi\cdot\nabla QdV$$

但由Green 定理 $\int_R\nabla\Psi\cdot\nabla Q\ dV=\int_B Q\frac{\partial\Psi}{\partial n}dS-\int_R Q\nabla^2\Psi\ dV=o$

（參考Lass向量與張量分析 P.118）

$\therefore4\pi(\phi_2-\phi_1)^2Co=\int_R|\nabla\Psi|^2dV$ + Positive number or zero

$$\therefore Co\geq\frac{1}{4\pi(\phi_2-\phi_1)^2}\int_R|\nabla\Psi|^2dV$$

此式左右兩邊之差即爲常數 $\times\int_R|\nabla Q|^2dV$ (4)

■定理三：已知 U_i 爲Laplace方程 $\nabla^2U=o$ 之解 $(i=1,2,\cdots\cdots N)$ 令 $\Psi=\sum_{i=1}^{N}a_iU_i$，若此Ψ能使積分(4)極小，則 a_i 必滿足 $\int_B(\phi-\Psi)\frac{\partial\Psi}{\partial n}dS=o$

證明：$Q=\phi-\psi=\phi-\sum_{i=1}^{N}a_iU_i$,

$$I=\int_R|\nabla Q|^2dV$$

則$\frac{\partial I}{\partial a_k}=o$ $(k=1,2,\cdots\cdots N)$

但$\frac{\partial I}{\partial a_k}=2\int_R (Q_x \frac{\partial Q_x}{\partial a_k}+Q_y\frac{\partial Q_y}{\partial a_k}+Q_z\frac{\partial Q_z}{\partial a_k})\,dV$

$$=-2\int_R (\frac{\partial Q}{\partial X}\cdot\frac{\partial U_k}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\frac{\partial U_k}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial Z}\cdot\frac{\partial U_k}{\partial z})\,dV=-2\int_R (\nabla Q)\cdot(\nabla Uk)dV$$

$$=2\int_R Q\nabla^2U_k dV-2\int_B Q\frac{\partial U_k}{\partial n}\,dS=o$$

(由Green定理)

但$\nabla^2 Uk=o$ $\therefore\int_B Q\frac{\partial Uk}{\partial n}dS=o$ $(k=1,2,\cdots\cdots N)$

$\therefore\int_B Q\cdot\sum_{k=1}^{N} a_k\frac{\partial Uk}{\partial n}dS=0$ 即 $\int_B(\varnothing-\Psi)\frac{\partial\Psi}{\partial n}dS=0$

§.5 今回到原例題，$u=\sqrt{x^2+y^2+\alpha^2z^2},\alpha>o$

在$\alpha=1$之特例下，很顯然地$\varnothing=\frac{a_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+a_2$

故爲$\alpha\neq1$的情形可選擇$\Psi=a_1U_1,U_1=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

其餘 $U_2=U_3=\cdots U_N=o$， 則由$\int_B(\varnothing-\Psi)\frac{\partial\Psi}{\partial n}dS=0$ 得 $\int_B\varnothing\frac{\partial U_1}{\partial n}dS-a_1\int_B U_1\frac{\partial U_1}{\partial n}dS=o$

$$\therefore\ a_1=\frac{\int_B\varnothing\frac{\partial U_1}{\partial n}dS}{\int_{B_1} U\frac{\partial U_1}{\partial n}dS}$$

$$=\frac{\varnothing_1\int_{B_1}\frac{\partial U_1}{\partial n}dS+\varnothing_2\int_{B_1}\frac{\partial U_1}{\partial n}dS}{\int_{B_1}U_1\frac{\partial U_1}{\partial n}dS+\int_{B_2}U_1(\frac{\partial U_1}{\partial n})dS}=\frac{\sum_{i=1}^{2}\varnothing_k J_k}{\sum_{k=1}^{2}L_k}$$

但$Jk=\int_{B_k}\frac{SU_1}{\partial n}dS$， $Lk=\int_{B_k}U_1\frac{\partial U_1}{\partial n}dS$

爲計算J_k,L_k,今改用(u_k,v,w)座標。令

$x=u_k\sin v\cos w,y=u_k\sin v\sin w,\ z=\frac{u_k}{\alpha}\cos v$

$(o\leq v\leq\pi,\ o\leq w<2\pi,\ k=1,2)$

則 $dS=\sqrt{(x_v^2+y_v^2+z_v^2)(y_w^2+y_w^2+z_w^2)-(x_vx_w+y_vy_w+z_wz_v)^2}\,dvdw$

$$=\frac{u_k^2}{\alpha}\sqrt{\sin^2v+\alpha^2\cos^2v}\sin v\,dvdw$$

（參考Apostol 數學分析P.331或其他微分幾何書上）

由于$\frac{\partial U_1}{\partial n}$的法線微分在上$B_1$沿著u↘的方向，在$B_2$上沿著u↗的方向， 又$\frac{\partial U_2}{\partial n}=\nabla u_1\cdot\vec{n}$

$$=\nabla U_1\cdot\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$$

$$\therefore\frac{\partial U_1}{\partial n}\Big|_k=(-1)^k\frac{(U_1)_x\cdot u_x+(U_1)_y\cdot u_y+(U_1)_z\cdot u_z}{\sqrt{u_x^2+u_k^2+u_z^2}}=\frac{(-1)^{k+1}(x^2+y^2+\alpha^2z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+\alpha^4z^2}\ (x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}\ \alpha^3}{u_k^2\sqrt{\sin^2v+\alpha^2\cos^2v}\ \ (\alpha^2\sin^2v+\cos^2v)^{3/2}}$$

$$\therefore J_k=(-1)^{k+1}\cdot\alpha^3\int_o^{\pi}\int_o^{2\pi}\frac{\sin v\ dwdv}{(\alpha^2\sin^2v+\cos^2v)^{3/2}}$$

$$=4\pi(-1)^{k+1}$$

$$L_k=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\alpha^3}{u_k}\int_o^{\pi}\int_o^{2\pi}\frac{\sin v\,d\,w\,d\,v}{(\alpha^2\sin^2v+\cos^2v)^2}=\frac{2\pi(-1)^{k+1}}{u_k}F(\alpha)$$

$$但F(\alpha)=\begin{cases}\frac{\cos^{-1}\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}+\alpha & o<\alpha<1\\ 2 & \alpha=1\\ \frac{\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})}{\sqrt{\alpha^2-1}}+\alpha & \alpha>1\end{cases}$$

代入$a_1=\frac{\Sigma\varnothing kJk}{\Sigma\ Lk}$中

得 $a_1=\frac{2(\varnothing_1-\varnothing_2)}{F(\alpha)(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2})}$

$$C_o\geq\frac{a_1^2}{4\pi(\varnothing_2-\varnothing_1)^2}\int_R|\nabla U_1|^2dV$$

$$=\frac{a_1^2}{4\pi(\varnothing_2-\varnothing_1)^2}\int_R U_1\frac{\partial U_1}{\partial n}\ dS=\frac{a_1^2(L_1+L_2)}{4\pi(\varnothing_2-\varnothing_1)^2}$$

$$=\frac{2}{F(\alpha)}\cdot\frac{u_1\ u_2}{u_2-u_1}\qquad\therefore\frac{2+\alpha^2}{3\alpha}(\frac{u_1\ u_2}{u_2-u_1})\geq Co\geq\frac{2}{F(\alpha)}\cdot(\frac{u_1\ u_2}{u_2-u_1})$$

在$\alpha=1$時上式左右兩端相等，故在$\alpha\doteqdot1$時，上式的上下限極有力。在$0.5\leq\alpha\leq2.0$ 之間上限約爲下限的1～1.3倍。