幾何光學之問題

青

今年就算是我們幸運的了，雖然令人痛心的放棄了德文，但是也把原屬三年級的一門課——光學，擠進了我們的功課表。就這樣，堂堂皇皇的六門大課，直逼得我把星期天劃歸爲第七門課——「國際現勢」。當然，我早決定星期天是傻瓜看書的日子（自然結論：考試一到，我也是傻瓜之輩。）言歸原題，光學之下貶，自有系主任的用意，但是畢竟我們只是受過「Halliday」或「Feyman」初等薰陶的人，談不上對光學，尤其是近代量子光學有何優越的基礎。崔老師也明白，我們也明白，於是在宣稱「把住觀念，打穩根本」之下，我們踏踏實實地再從「幾何光學」學起。興趣之餘，我也就抓出了幾個問題來共同欣賞欣賞，其深淺程度自不在功課之上。

在反射問題上，我們常視球面之一部份爲凹面鏡，以求得各種結果。然而如單就聚光而言，其佼佼者自非拋物面鏡莫屬。在折射問題上，主要的工具則是透鏡，而這透鏡也常被假設爲相交二圓之一部份，以求得各種理論。相同的情形，就聚光而言，我們是否有能力完全的使光線集中一點？爲求得這個令人深思的結果，我們可以從單面折射來討論：

首先爲方便起見，我們假設此曲面對X軸對稱，光線向右沿X軸平行前進；此曲面凹向右而充滿折射率爲n之介質。條件：此曲面使光線完全交於 $x=f$ 之點上。在解題時，我們摒棄Fermat's principle 及 Snells' Law（否則將遭致繁雜的工作）所採取的乃是波動學說：通過折射面上任一點的光線，其到達 $x=f$ 之光學途徑乃是相當。若取其中通過 (x,y) 點者，必滿足下式之條件：

$$x+n\sqrt{(f-x)^2+y^2}=nf$$

展開整理之，乃得

$$(n^2-1)x^2+n^2y^2-2nf(n-1)x=o$$

所以此曲面乃是橢圓之一部份，而長軸，短軸各爲

$a=\frac{nf}{n+1}$，$b=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}f$，所以軸圓焦點

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{f}{n+1}$，求得結果 $a+c=f$。

這種結論是有趣的，根據從橢圓一焦點發出之光線反射後必交於另一焦點，我們可在這個橢圓之長軸兩側置二個大小適當的鄉圓面鏡，則沿長軸入射之光線，必在此二反射面間來回反射而漸趨近於長軸，若在鏡中心開一小洞，必可形成一束强烈之光線，且甚集中。

單討論一面是不切實際的，如何構成一個完全集中之透鏡呢？很簡單，只要以 $x=f$ 爲焦點而以 $r<a$ 爲半徑取一圓，此圓與原先之橢圓乃構成所需之透鏡，因爲第二面上者皆垂直光線，不影響其行進。問題來了，若我們予以固定的 n 及 f，則所形成的透鏡乃有一定之大小，至大也只能達到 $r=b$，這似乎限制了透過光線之多寡。爲解決此一困難，我們惟有改變原來情況。

假設曲面凹向左而充滿折射率爲 n 之物質，而欲在自由空間相距 f 之處形成焦點，曲面爲何？依照上面之討論可得一雙曲面：

$$(n^2-1)\ x^2-y^2-2f(n-1)x=o$$

當然其光線交點仍在雙曲線之一焦點。組成透鏡時，我們只需取任一平面垂直於X軸，則可得一任意大小之透鏡。既然通過一平面及一雙曲線面，我們可得一具有完美焦點之透鏡，則所收集之光線自可無窮增加，解決了鄉圓之難。至此，已得凹凸透鏡及平凸透鏡，至於雙凸者則非垂手可得者。

我們發現既然可得一完美之焦點，是否在另一面亦有一焦點？於是我們將雙凸透鏡反向而置，平行光線落於雙曲面上，依折射定律決定光線行徑，則假設透鏡厚度爲 a，通過曲面上 (x_0y_0) 點之光線交 x 軸於 $a+b$ 處，我們可得一組代換方程：

$$\tan\alpha=\frac{(n-1)[(n+1)x_0+f]}{yo}$$

$$=\frac{(n-1)\ A}{yo}$$

$$\cos\alpha=n\ \sin\beta$$

$$\tan\gamma=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin\delta=n\ \sin\gamma$$

$$b=\frac{y_0-[(a-x_0)\ \tan\gamma]}{\tan\delta}$$

其中只有 b 和 x_0 ，y_0 之函數關係爲我們所要求的，經過一番痛苦的計算，也只能得到

$$b=[y_0-(a-x_0)\tan\gamma]\sqrt{n^2(1+\cot^2\gamma)-1}$$

$$及\ \tan\gamma=\frac{A\sqrt{(n^2+1)A^2-f^2}+f^2-A^2}{\sqrt{(n^2+1)A^2-f^2}+A}$$

$$\cdot\ \frac{n-1}{y_0}$$

你是否希望再得到更複雜的式子呢？根據其複雜性，要b與x_0,y_0無關是不大可能了，(但是我也不敢確定，說不定到處都有奇蹟，只有自己去「隔物致知」了。套一句物理系中的至理銘言：「大概或者也許是，不過恐怕不見得，然而個人應以爲，但是我們不敢說。」眞是於我心有戚戚焉！)

最後談一談非靜態之反射及折射定律。當反射平面以u 之速度退後時，利用波前之 Huygen"s principle。設 ε 爲二接觸點連線與反射面之夾角，則由入射及反射三角形全等， 可得 $\gamma=i+2\varepsilon$ ，而再度取相等之光行路程，乃得此種狀態下之反射定律：

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{c+u}{c-u}\ \tan\frac{i}{2}$$

當折射面以之速度後退時，利用上面相同之ε定義，可得 $\frac{u}{c}=\frac{\sin\varepsilon}{\sin(i+\varepsilon)}$ 及 $\frac{u}{v}=\frac{\sin\varepsilon}{\sin(\gamma+\varepsilon)}$

所以 $\frac{c}{u}=\sin i\cot\varepsilon+\cos i$ 及

$\frac{v}{u}=\sin\gamma\cot\varepsilon+\cos\gamma$ 相消去 ε

則 $\frac{1}{u}(c\sin\gamma-v\sin i)=\sin(\gamma-i)$

若加以整理則得

$$\sin\gamma=\frac{v\sin i\,(c+u\cos i)-u\sin i}{c^2+2uc\cos i+u^2}$$

$$\sqrt{c^2+u^2-v^2\sin^2 i+2uc\cos i}$$

由此可得一結論，除非 $v=c$， γ 是永遠不等於 i 的。

至於其在此時所發生的波長改變等，則已經是物理上 approximation 的範圍了。

是否有可能使 $\gamma=i$ ？設介質橫向流速爲 V ，則光線取近似值，U_v 是變化很小，而

$$U_x=\frac{c}{n}\sin i+v\left[\frac{1-\sin i}{n^2}\right]$$

若 $\gamma=i$, 則 $U_x/\frac{c}{n}\sin i=\frac{\tan\gamma}{\tan i}$

$$故\ 1+\frac{n^2v}{c\sin\gamma}-\frac{v}{cn}=\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\gamma}}{\cos\gamma}$$

而得流體速度與 γ 及 n 之函數關係

$$v=nc\left[\frac{\tan\gamma\sqrt{h^2-\sin^2\gamma}-\sin\gamma}{n^3-\sin^2\gamma}\right]$$

合理否？似乎很合理哩！代代看吧！

特殊相對論裏的彈性撞碰

葉伯琦譯自 Am. J. Phys.

(Yutze Chow 原著)　　1969

在古典特殊相對論裏，二個質點的彈性碰撞可以用一個非常簡單的四維向量方程式表示之：

$$q=(R\theta)P \qquad (1)$$

P 爲 Lab frame 上一個質點的四維動量 (four-momentum。

q 爲 Lab frame 上這個質點碰撞後的四維動量。

$(R\theta)$是由於在 C. M. frame 上碰撞後所轉的角度 θ 所引起的 transformation matrix (在 Lab frame 上)

嚴格講起來

$$(R\theta)=L^{-1}(R\theta)^*L \qquad (2)$$

L 爲 Lorentz transformation 由 Lab frame 到 C. M. frame.

$R\theta^*$ 爲 C.M. frame 上的 rotation matrix。(θ 爲在 C. M. frame 上碰撞前後質點運動方向的夾角)

設二質點 a , b 則

$$q_a=(R\theta)\ P_a \qquad (3)$$

$$q_b=(R\theta)\ P_b \qquad (4)$$

△ 導　　出 △

先定義一些符號：