易找事情呢？在1957年，由於蘇俄首先施放人造衛星的刺激，使美國極感發展科學的必要，因而大量投資，particle 方面又正有許多新的現象，吸引力較大，使得許多人都往這 field 中擠，而超過該 field 所需，以致現在人太多，而那些對於這 field 並無很深刻了解和基礎的人，當然就慢慢地被排擠於外。」

到此，高學長又提出了對系同學的一些新的建議：「畢業後，要選擇 field，最好等到進研究所後一、二年，對於要選的 field 有較深的了解，也使自己能有一些基礎，不要盲目的專找較熱門的，人多的 field 鑽。同時物理學家也應走出象牙塔，做些應用方面的研究。由物理學家們自己來研究物理應用於社會民生，也使得物理上的進步更直接地影響社會生活和其他科學的發展。」

王同學問：「生物物理和化學物理如何？」

答：「生物物理是一門較新的學科，有不少很好的物理學家都在從事這方面研究，但尚無重大的成就，但是可期望的，不久一定會有很大的發展。至於化學物理方面，如探討的方法仍是化學的，則僅能算是化學的一門。必須等把物理的方法用上去，才可成爲眞正的化學物理。發展如何，尚難逆料。」

此外，高學長還說到：「同學們應該多多充實自己，多作一些實驗。就是有志於讀理論物理的同學，也不應忽略實驗。這裏有些同學有錯誤的觀念，認爲理論物理學家不需要懂得實驗，但事實上，作爲一個成功的理論物理學家，對於別人的數據要能分析判斷，才可有助其理論，甚而他們還可建議實驗物理學家如何進行實驗工作。所以同學們有機會就應該多作一些實驗工作以爲將來舖路。」

最後談到留學政策的問題，高學長曾在「大學新聞」上發表了一些意見，主要的是「留學求知是件好事，能不能學有所用於國家；則要看國家是不是主動爭取人才回來，中國人到底還是中國人，大家都想爲國家作點事，主要還是希望國家能夠主動地爲這些人才作適切的安排。」

在物質內「正電子消滅輻射」角相依

詹　國　禎

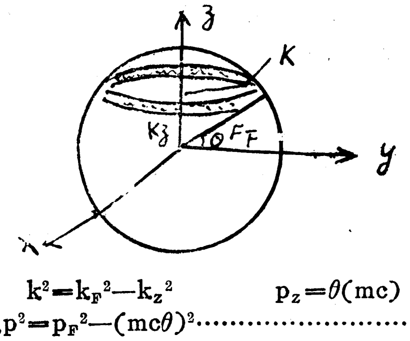
—前　　言—

此次暑假在固態實驗室渡過，很幸運地在正電子消滅輻射角相依理論與實驗方面，得到Loisvilla大學教授黃惟峯博士的指導，使筆者在這方面有更深切的認識，更重要的是實驗技術上的指正，這不是書本上所能見到的。黃博士暑假私費回來探親，却肯犧牲許多寶貴的時間，做數次專題演講，使我們不致予暗中摸索，這是很令人感動的。在此筆者謹代表本實驗室工作者向黃博士致最高的謝意。更希望在海外的學長們，能夠賜給我們一些東西。我們會衷心地謝謝你們。本文承蒙黃惟峯博士、鄭伯昆博士過目批改，筆者特別表示謝意。

※　　※　　※　　※

正電子射入物質內，就和負電產生消滅輻射而射出光子。輻射的光子數目，依入射的條件和電子作用的狀態而定。輻射的光子數可以有一個兩個………，平常有一對的光子及三個光子放出。當正電子能量夠大時，而且在成對消滅過程中可以滿足動量不滅定律，就會有一條伽瑪射線產生。平常，當正電子與負電子自轉方向是反向平行（Anti-parallel）時，其自轉和（Total spin）等於零，只有一種狀態存在，稱之爲單態 $_1S^1$ (singlet)，而放出兩個光子，由動量守恆及能量守恆定律，知道是能量相同而方向相反的兩條伽瑪射線。若正電子與負電子的自轉方向是平行時，其自轉和等於1，由量子力學得知，可有三種狀態存在,稱之爲三態 $_1S^3$（Triplet)，可放射出三個光子來。由動量、能量守恆定律，知道是能量相同而方向是 $2\pi/3$ 的三條伽瑪射線。迪拉克（Dirac）[1] 利用平面波近似法（plane wave approximation）去計算消滅截面積（Cross section），假設正電子、負電子間的庫倫引力作用(Coulomb Force Interaction)可略而不計，放射兩個光子的消滅截面積是 $\rho_2\gamma=\pi\gamma_0^2(^c/_v)$，此處 γ_0 是古典電子半徑，V 爲正負電子間的相對速

度。計算三條伽瑪射線消滅截面積 $\rho_3\gamma$ 較麻煩，由 D_{re} 及 Powell[2] 計算出 $\rho_3\gamma$ 與 $\rho_2\gamma$ 間的關係爲 $\frac{\rho_3\gamma}{\rho_2\gamma}={}^1/_{372}$。因三條伽瑪射線作用的截面積遠比兩條的小，所以對於測量物質內電子動量分佈角相依 (angular correlation of momentum)，都以兩條伽瑪射線爲主，忽略了三條伽瑪射線的作用。而且兩條伽瑪射線供給我們的情報 (Information) 較有意思。兩條伽瑪射線消滅的截面積是與正負電子間相對速度成反比，因正電子自 Na^{22} 射出至到達物質時，正電子的能量相當高 (約一百萬伏特)，由於正電子的速度過大，發生消滅的可能率很小，不易和負電子做消滅輻射。通常，正電子先一連串與金屬中的原子格子振動 (lattice vibration) 發生非彈性碰撞，損失它的動能，而速度慢下來變成熱化電子 (Thermalized positron)，而達到熱平衡 (Thermal equilibrium)，熱平衡下的正電子動能很小 (約 ${}^1/_{40}$ ev)。當正電子再次與電子碰見時，並不馬上與電子發生消滅輻射，而是受到庫倫引力作用形成束縛體系 (Binding system)，如氫原子一樣，唯一不同的是正負電子相互束縛形成一個很像原子形狀，但很不穩定，在很短的時間內，馬上又消滅了。我們稱此爲正負電子偶原子狀 (positronium)。正電子與負電子形成的正負電子偶原子狀，也由於自轉方向的不同，而結合形成的正負電子偶原子狀也不同。假設正電子與負電子形成的正負電子偶原子狀，是在激發狀態($\ell\neq o$)，則不會馬上發生消滅輻射，而是先跳到基態 (Ground state $\ell=o$)，也就是 s— 狀態在 (s—state)，而放射出特性光譜 (charcteristic optical spectrum)，然後才會消滅。在基態時，如果正電子與負電子自轉的方向是反向平行 (Anti-parallel)，則自轉和爲零，稱之爲單態或 $1S^1$—狀態 (singlet state)，該正負電子偶原子狀稱之爲單態正負電子偶原子狀 (singlet positroniuni)或又稱爲逆向平行正負電子原子狀 (para—positronium)。如果正、負電子自轉的方向是平行 (parallel) 時，自轉和爲 1，此種狀態稱之爲三態或$1S^3$—態(Triplet state)，該正負電子偶原子狀稱爲三態正負電子偶原子狀 (Triplet — positronium) 或又稱爲正交正負電子偶原子狀 (ortho — positronium)。消滅時，由於選擇律 (selection rule)，限制單態正負電子偶原子狀只放出兩個光子，即是兩條伽瑪射線，而三態正負電子偶原子狀却放出三個光子來，也就是三條伽瑪射線，此種消滅狀態稱之爲三態消滅 (Triplet Annihilation)。如前面所言的，有興趣的只是放射兩個光子情形。正電子在物質內與負電子產生消滅輻射，如質量中心靜止，放射出的是兩條能量相同而方向相反的伽瑪射線。由於正、負電子並非靜止，故質量中心並非靜止而是有速度 → 也就是質量中心亦有動量，如此兩個光子並非完全在同一條直線上，而是有一點小角度，其角度大小決定於質量中心的動量 $\vec{P}$，其關係爲 $P_z=\theta\,(mc)$[3]，如我們在z—方向測得 θ 角，則可求得質量中心在 z—方向動量的大小。由達到熱平衡下的正電子，時間僅10^{-12}秒，而且動能甚微，通常視正電子爲靜止。故質量中心的速度，可說全部是負電子對正電子的相對速度，由此可決定電子動量分佈的情形。由 $P_z=\theta.mc$，可知角度 θ 與 P_z 有相依的關係，所以稱之爲電子動量分佈的角相依。金屬內，正電子消滅輻射的角相依曲線，差不多可分爲三種，第一種是拋物線而在大角度微有尾巴的，凡A羣金屬 [3] (L_i. Na. B_e .M_g.Al. G_e. S_n. B_i) 均屬比型，第二是在大角度有大尾巴的拋物線型，凡 B 羣金屬 (C_a. B_a. Z_n. Cd. P_b) 均屬此型。第三是鐘形的角分佈型 (Bell-shaped)，凡 C 羣金屬 (C_u, A_g, A_u, F_e, C_o, N_i ,P_h P_b,P_t) 均屬此型。當我們測得角相依曲線後，如何去分析這些數據呢？到目前仍然是一個難題。先前用的是費米自由電子氣體模型 (Fermi free electron gas model)，Stewart 和 De-Benedetti 利用此模型去分析數據，結果算出的費米能量 (Fermi energy) 與理論上所得的值十分吻合，可是對於動量分佈的角相依曲線尾巴部份，不能合理的加以解釋。由自由電子氣體模型理論得知在動量空間裏，自由電子的動量分佈圖：



$$k^2=k_F{}^2-k_z{}^2 \qquad p_z=\theta(mc)$$

$$\therefore p^2=p_F{}^2-(mc\theta)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由簡單的計算可得分佈函數

$$N_z(p_z)=\frac{1}{2}\int_{p_z}^{\infty}\frac{N(P)}{P}\,dp \cdots\cdots\cdots(2)$$

在T＝o^0k時，由費米自由電子氣模型得知

$N(P) = P^2 \qquad P^2 < P_m^2$ ....(3)

$\quad\;\; = 0 \qquad\; P^2 > P_m^2$

$\therefore\; N_z(P_z) = const(P_F^2 - P_z^2)$

假如 $P_z^2 < P_F^2$ ....(4)

但假如 $P_z^2 > P_F^2$ $N_z(P_z) = 0$

此曲線爲抛物線。此處 $P_F = h(3n_0/8\pi)^{1/3}$，是費米動量（Fermi--momentum），n_0是電子密度，抛物線在水平軸有截點（cutoff point），但沒有尾巴(tails)，費米模型未能解釋此尾巴部份。其次是利用庫倫引力作用模型(Coulomb Force Interaction model)，將正電子與負電子庫倫引力作用考慮進去，則對於某些金屬尾巴部份可以有較合理的解釋；可是對銅的半幅寬（half-width）比用庫倫力作用模型得到的曲線寬，不能合理解釋銅元素。第三種是利用波動函數去處理分析數據，成就最輝煌的當然首推 Berko[4]，他們最先做的金屬鋁銅。因正電子進入物質後，很快慢下來，只有很低的動能，因此很少有可能進入 K. L. M 層內，與電子做消滅輻射，那是由於受到原子核的庫倫斥力作用而無法接近之故。因此正電子只與導電子（conduction electron）做消滅輻射。此假設是非常合理的。因正電子可視爲靜止，故動量分佈只與導電子有關。依照上面的假設，可以假設正電子在狀態 $\vec{K}+$下的波動函數爲 $e^{-i\overrightarrow{K+}\cdot\vec{r}}$，因波數（wave number）$\overrightarrow{K+}$差不多爲零，故 $e^{-i\overrightarrow{K+}\cdot\vec{r}}$ 差不多可視爲常數。假設負電子在物質內的電位（potential）是一種週期電位（periodic potential），而且假設金屬的結晶是單一結晶（single crystal），如此波動函數可以用 Bloch函數來表示，設電子在$\vec{k}_-$狀態而在 $\vec{r}$位置時，其波動函數爲 $e^{-i\vec{K}_-\cdot\delta r}$ 放射 光子之波數 $\vec{k}$ 也是平面波$e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$，由費米一迪拉克分佈函數（Fermi-Dirac distribution function)，動量介於$\vec{p}$與$\vec{p}+\vec{dp}$之間的消滅輻射可能率爲

$$N(\vec{p})\vec{dp} = const\,\Sigma k_+k_-F_+(\vec{k}_+)F_-(\vec{k}_-)\,|\varnothing_{K+K-}(\vec{p})|^2\vec{dp} \quad \text{......(5)}$$

此處$F\pm(K\pm)$是正電子分別在$k\pm$狀態下的可能率若對於熱平衡下的正電子 (thermalized positron)

$$F_+(\vec{k}_+) = const\ \exp[^{-E+(\overrightarrow{K+})}/_{kT}] \quad \text{...(6)}$$

若對於在全滿能帶（ filled bonds) 下的電子爲

$$F_-(\vec{k}_-) = const \quad \text{......(7)}$$

對於半滿能帶 (half-filled bands) 下的狀態爲

$$F_-(\vec{k}_-) = const\{\exp[E_-(\vec{k}_-) - \xi(T)]/_{kT} + 1\}^{-1} \quad \text{......(8)}$$

此處 $\xi(T) = \dfrac{h^2k^2}{8\pi^2m} = E_F$

由輻射理論得知正電子與負電子在座標空間（coordinate space) 矩陣單元爲

$$\varnothing_{k+k-}(\vec{p}) = (2\pi)^{-3}\int \varphi^*_{k+}(\vec{r})\,\varphi_{k-}(\vec{r})\exp(-\vec{ip}.\vec{r})\vec{dr} \quad \text{......(9)}$$

或由 Fourier Transform 可知在動量空間（momentum space) 裏的對應波動函數（corresponding wave function) 的振幅爲

$$\varnothing_{k+k-}(\vec{p}) = (2\pi)^{-3}\int \varphi^*_{k+}(\vec{P}_+)\,\varphi_{k-}(\vec{P}_-)\,\delta(\vec{p}_+ + \vec{p}_- - \vec{p})\,\vec{dp}_+\,\vec{dp}_- \quad \text{......(10)}$$

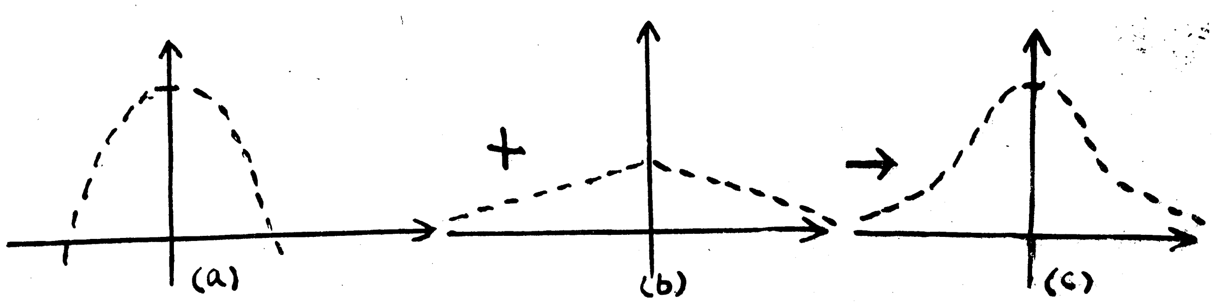
此函數是表示動量守恆，亦即除了$\vec{p} = \vec{p}^+ + \vec{p}^-$外等於零。

因假設正電子已熱化 (thermalized)，所以正電子與負電子在座標空間的座標函數的振幅爲

$$\varnothing_{k+k-}(\vec{p}) = N\int \varphi_-e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}dr \quad \text{...(11)}$$

此處N是法化常數 (Normalization constant)

原子核外的導電子，如省略庫倫引力作用，則導電子可看成自由粒子；如在原子核庫倫引力不可省略之區域內，亦即殼電子，也有其波動函數。所以負電子波動函數可視爲導電子與殼電子的合成函數。其分別圖形與合成圖形如下；(a)+(b)⇒(c)



上圖(a)曲線表示由自由電子波動函數求得的曲線。

(b)曲線表示由殼電子波動函數求得的曲線。

(c)表示兩條曲線(a)(b)的合成曲線。

由圖上得知，對於實驗上動量分佈角相依曲線的尾巴部份，可以很明顯看出來是由於正電子與殼電子作用產生消滅輻射的結果。而對於銅元素半幅度爲何較其他金屬有較長的半幅寬 (long-galf-width)，那是因銅的殼電子 (d-electron) 較多所致，如此亦能做很合理的解釋。到目前爲止，此方法是最成功的一種。

關於角相依在固態上的應用，由於量得相依曲線，可知電子動量分佈的情形，物性都由電子結構所支配，故利用角相依可研究固態。如用的是晶體樣品，可研究有機晶體的動量分佈。雖然能用正電子消滅輻射來研究有機晶體結構及晶體方向，但如何去割取單一結晶體 (single crystal)，仍是很困難的事，尚須藉著精度很高的 X—射線 (x-ray) 來決定克分子面，以保證割下的晶體面就是克分子面。利用它可研究液態與固態間的變化，瞭解物質相移 (phase transition) 的變化。如樣品是絕緣體如 Teflon，Y_2O_3 等，可研究殼電子與正電子發生消滅輻射的動量分佈情形。除此之外，尚可研究磁性物質的極化現象，測量磁的分佈 (Magnetic distribution)。

關於磁效應 (Magnetic effect) [7] 和溫度效應 (termperature effect)，由於 s 層電子，其角動量 $\ell=0$，故不受磁的影響，但 d 層殼電子，其軌道角動量 $\ell=1$，故受磁場的影響，由於殼電子就是 d—電子，如此利用磁場可以研究 d— 電子有多少與負電發生消滅輻射。通常磁場加的强度約 20 kilo-Gauss，而磁場方向與正電子射出的方向平行，對於三條伽瑪射線省略不計。由實驗得知，在磁性物質 (Fe, Co, Ni) 內，當磁場方向改變時，其强度亦隨之磁場方向變化而改變。設 $P(\theta)$ 是規定爲

$$p(\theta)=\frac{N\uparrow-N\downarrow}{N\uparrow+N\downarrow}=\frac{N\uparrow-N\downarrow}{N}\cdots\cdots(12)$$

此處 $N\uparrow+N\downarrow=N$

$N\uparrow$：表示自轉向上的粒子數目

$N\downarrow$：表示自轉向下的粒子數目

如此由實驗量得 θ 與 $P(\theta)$ 之變化，量得結果發現變化部份僅是尾巴部份，可見只有殼電子 (d-electron) 改變而已。對於 Fe, Co 的動量分佈變化，有非常理想的結果，但 Ni 却令人失望得很，有待繼續研究，其結果繪成曲線如圖 (a), (b)。溫度效

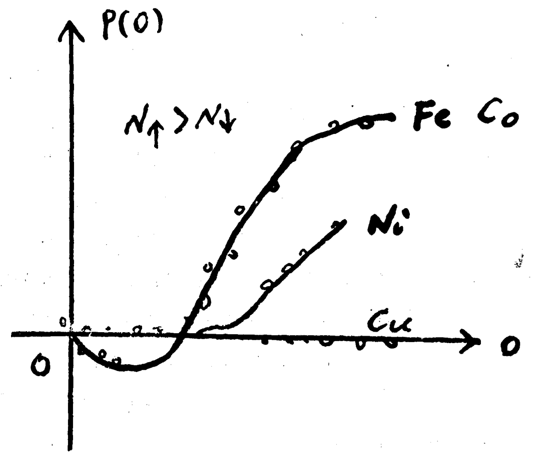
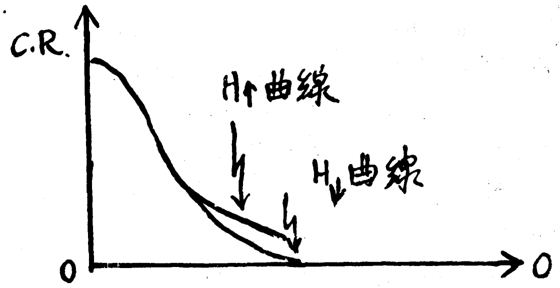


圖 N↑ < N↓



應上的實驗，於 1955 年 Stewart 做 Teflon溫度變化的角相依。結果發現溫度昇高時，對於大角度的分佈變化很小，而小角却有很狹的分量出現，此被解釋由於三態正負電子偶原子狀 (positronium) 活期增加，同時三條伽瑪射線的輻射率也增加，以致才有尖峯 (peak) 出現。

結　論

關於角相依的理論，到目前爲止，並沒有很完滿地解決。雖然 Berko 劃出鋁銅的角相依理論上的曲線，能十分吻合實驗上的曲線。但是否能吻合每一樣品呢？到現在尚無法知道。如能求得一個含有幾個參數 (如 A, Z……) 的通式，則角相依在固態上的研究工作當然能做得很完美。磁場效應對於磁性物質的研究，尤其是鐵、鈷已得令人滿意的結果，對於鎳尚待進一步研究。關於用波動函數去計算理論曲線，本實驗室江眞誠助教已計算出氫原子核外的電子角相依曲線，附錄本文後面。實驗方面，去年陳耀南校友已做鋁的角相依分佈，證明儀器性能甚好，今年筆者希望做些不銹鋼的角相依分佈。

參考：(1) P.A.M. Dirac, Proc Cambirdge phil. Soc. 26 361 (1930)

(2) Ore and Powell Phys. Rev. 75 192 (1954)

(3) G. Lang and S. DeBenedetti, Phys. Rev. 108 914 (1957)

(4) Berko Phys. Rev. 112 1877 (1958)

(5) Stewart. Phys. Rev. 108 713 (1957)

(6) S. S. Hanna and R.S. Preston Phys. Rev. 109 716 (1958)

(7) V. L. Sedov Soviet. physics Uspekhi 11 163 (1968)

附　　錄

在實驗室中，測量正負電子相消所產生的加馬射線的角相依含有很大的意義；由它可窺視物體中電子動量分佈的狀態。例如，如果我們測得一個角相依爲

$$N_z(P_z) = \text{const.}(P_f^2 - P_z^2)$$

$$P_z^2 < P_f^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

則可知道其中電子甚爲自由。

現在讓我們來用氫原子的波動函數來做一試驗性的計算：

用 $\phi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{zr}{a_0}\right)$

我們可得 $F_{k^+k^-}(p^+p^-) = \int e^{-ik\cdot r}\varphi_+(r')$

$\varphi(r)d^3r[\phi_+=1] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$

$$= \int e^{-iK\cdot r}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{-zr}{a_0}\right)d^3r$$

積分之後，可得

$$F_{k+k-} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2}X'$$

$$X' = 4\pi\left[\frac{1}{\left(\frac{z}{a}\right)^2 + (k)^2}\right]^2$$

而 $Nz(\theta) = \iint |F_{k+k-}(P_x P_h mc\theta)|^2$

$dp_x dp_y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{a_0}\right)^3 16\pi^3\left[\frac{1}{\left(\frac{2\pi mc\theta}{h}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{hpc}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}\right]$$

以 $m = 9.1\times10^{-31}$kg. ϑ=(rad).

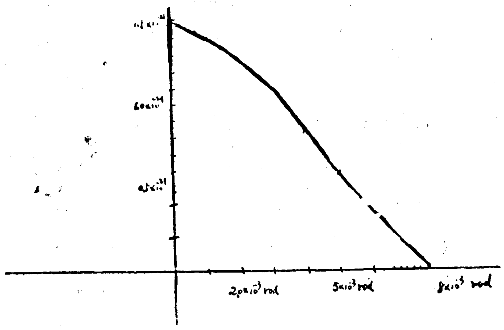
$c = 3\times10^8$m/see　$z=1$.　$a = 0.53\text{Å}$

$P_c = \frac{2\pi me^2}{h}$　　$e = 1.6\times10^{-19}$coul

代入該式，　此處 z: atomic number,

a: Bohr radius. 可得一曲線如圖 (A.1)

本計算純爲試驗性質，而且氫原子的角相依也沒有人測量出來，但讀者如果自己把上述計算重覆一遍，恐怕就能了解這類計算工作的複雜性。



關於非歐派幾何學的一個問題

•浸　寂•

今夏作者於研討張量之基本性質及其應用時，獨對於 Riemann Christoffel曲率張量頗感興趣，蓋由斯引發出夫空間曲度之概念，而爲相對論所重視，舊昔嘗叱叱疇壇一時之非歐派幾何學實乃其一特殊情形也，撫今追昔，似尙有重彈舊調之興，因爰引一例與讀者諸君共享之。

坊間所出之非歐派幾何學書籍，多只限於 2 維空間之討論，即論列波里愛 (Janos Bolyai) 和羅巴切夫斯基之雙曲式平面幾何及平面解析幾何，以及黎曼 (Benhard George Friedrih Riemann) 之橢圓式平面幾何及平面解析幾何。然依義大利幾何大師 Beltrami 氏之闡述：前述二種幾何只不過是 Gauss 曲率各爲負常數及正常數之 2 維解析流形 (analytical manifolds) 上之幾何，而將其測地線 (Geodesics) 看成直線而已，試見其名著："Saggio Di Interpret azione Della Geomet-