規範理論之

幾何化

張國龍

早在公元前十八世紀的巴比倫時代，人類已經累積了一些幾何的知識。到了希臘時期（600～300 B.C.）自然哲學家就開始利用幾何的知識和觀念去探討或研究物理學和天文學。等到十七世紀，數學家把分析的方法引進幾何學之後，幾何和分析就成為物理學研究的基本工具。

規範理論的幾何化，幾乎與電磁的規範理論同時長成。電磁系統是物理學家第一個發現具有規範對稱性的物理系統。描述這系統的理論稱為可對易規範理論，我們如果用 A^{μ} 表示電和磁的向量位（有時也稱規範位），那麼下列的關係式

$$A^{\mu} \rightarrow A'^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu} f$$

就稱為規範變換。f 表示任一可微分的時空函數。這種變換並不影響電場和磁場強度，因為

$$E'^{i} = E^{i}$$

$$B'^{i} = B^{i}$$

所以稱 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 具有規範對稱性。有時我們也把電場和磁場合稱為規範場。可對易這個名稱的由來是因為當我們連續做兩次規範變換時，規範位的改變與兩次規範變換的順序無關。

介紹了這些名詞之後，我們來看看十九世紀初期如何開始用幾何學去研究電磁學。

一個半徑為單位長度的球面積，早在 Archimedes（287～212 B.C）時代就知道如何去計算，但是當 Gauss（1777～1855）研究球的幾何時，他避開球面積本身的計算而探尋整個球面對球心所張的立體角。甚且他還發現只要任取球內的一點，那麼球面對該點所張的立體角也恆為定值。即使再把球面變形為任意的封閉曲面，由曲面對其內的任何一點所張的立體角亦恆為定值。十九世紀初，物理學家就利用這個幾何的方法來處理靜態電的規範場；在一個抽象的封閉曲面內任何一點放置一個單位電荷，那麼對曲面上的規範場 E_n 做積分，則得 $\int E_n \, d\sigma = 4\pi$。物理學家也把這式稱為 Gauss 定理。這也是我們把規範場幾何化的第一個經驗。

很可惜這種幾何的技巧在 Gauss 之後的百餘年間並沒有繼續被發展。一直到最近幾年，使用幾何學工具來處理規範理論的研究才再度受到注目。對一般的物理學工作者，這新的工具、新的語言也常感到生疏。這一篇文章，主要的目的是給非專業性的讀者對這個新的研究領域做一個粗略的介紹，而儘量避免技術性的討論。

首先我們介紹幾何學上所謂平移的觀念。

在一平面上，二點之間的最短距離是直線。但是在限制球面上活動的人，他覺得兩點之間最“直”的路徑是通過這兩點的大圓弧。一個撐竿跳高的選手，當他在平面上手拿竿子沿直線而跑，我們很明瞭這根竿子沿著直線做平移。也就是說，竿子與直線的夾

角在選手跑步的過程中都保持固定。但是如果選手是在一球面上的大圓弧上跑步，我們怎麼去定義這竿子的平移？最自然的定義是：選手以固定持竿子的姿勢跑步時，這竿子的移動我們仍然視爲平移。幾何學上的平移就是如此定義的。如果一向量$\vec{V}$在大圓弧上平移，它的意思是指向量$\vec{V}$在大圓弧上移動時，$\vec{V}$與大圓弧上切方向的夾角保持固定。因此任何一向量，當它沿著一曲線做平移時，從一個固定座標系統上看，該向量並不「平行」。我們考慮曲面上的一個封閉曲線$\gamma(t)$，如果有一向量$\vec{V}$由$\gamma(a)$出發沿著$\gamma(t)$曲線平移而回到原來的位置$\gamma(b)=\gamma(a)$。但是$\vec{V}(a)$並不和$\vec{V}(b)$互相平行。它們之間的夾角一般說來與曲線$\gamma(t)$所包圍的曲面之彎曲結構有很密切的關係。

有了平移的概念之後，我們介紹一個數學上比較精確的描述記號。如果曲線用$\gamma(t)$表示，那麼$\frac{d\gamma}{dt}$代表該曲線的切線方向，一個向量$\vec{V}$沿著$\gamma(t)$曲線的變化我們記爲

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}\vec{V}$$

或稱爲向量$\vec{V}$對$\frac{d\gamma}{dt}$的共變微分。

因爲曲線上的切方向隨著位置而改變，不是固定的方向。所以共變微分$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}$和一般的微分$\nabla$不相同，$\nabla$是對固定座標取微分。因此

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}=\nabla+(\text{彎曲的矯正量})$$

有了上面的準備知識，我們可以來討論可對易的電磁規範理論。假設我們有一帶單位電荷的質點，當它在眞空中運動時，最自然、最不受拘束的運動軌跡是一條直線，我們稱這空間爲平空間。如果我們在空間中加了一組規範位A^{μ}，也就是說，當空間裏建立了電場和磁場，$F^{\mu\nu}=\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu}$。那麼該帶電質點感到最"自然"、最"不受拘束"的運動軌跡是一條曲線。我們可以說，規範位（或規範場）好像把一個平空間扭爲彎曲的空間，彎曲的情況當然和外加的規範位（或規範場）有關。

我們現在把帶電粒子的質點看爲一個量子系統，並且以Ψ來代表描述該量子系統的波函數，如果該系統沒有外加規範位（或規範場），要探討在位置$\vec{\gamma}$鄰域該系統的變化情形，那麼我們可以取波函數Ψ的微分來代表Ψ的變化量，即$\nabla\Psi$。其實在平空間中$\nabla\Psi$和Ψ的共變微分$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}\Psi$完全一樣。這個變化量，從量子力學的觀點，代表波函數沿著質點運動速度的方向之變化率。現在看看同一個帶電的質點，如果其運動空間中加了規範位（或規範場），那麼同在位置爲$\vec{\gamma}$的鄰域，該系統的變化情形將是如何？這個狀況就如同上述的撐竿跳高選手，當他跑曲線時持竿子的姿勢和他跑直線時持竿子的姿勢應當完全一樣，那麼竿子的移動才稱爲平移。因此在電磁場中運動的質點，描述該系統的波函數Ψ在位置$\vec{\gamma}$鄰域的變化之計算，應該取Ψ在$\vec{\gamma}$的共變微分，亦即$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}\Psi$。其物理的意義仍然表示波函數沿著質點運動速度的方向之變化率。從量子力學中，這個變化率爲

$$(\nabla-i\vec{A})\Psi$$

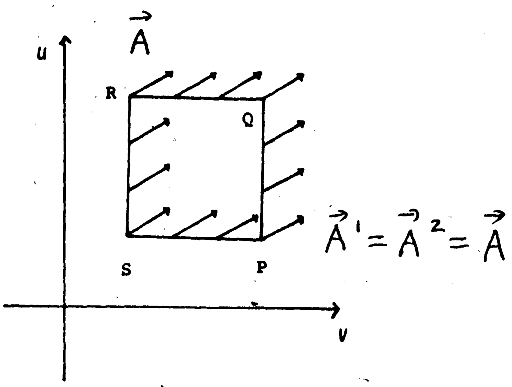
所以具有規範位之空間的共變微分爲$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}=\nabla-i\vec{A}$

我們也可以把以上的討論，擴及到包括具有時間變化的規範理論，那麼所得的結論可用下表說明

	無規範位的閔氏空間	有規範位的閔氏空間
波函數	$\Psi(t,\vec{\gamma})$	$\Psi(t,\vec{\gamma})$
共變微分	$D^{\mu}=\partial^{\mu}$	$D^{\mu}=\partial^{\mu}-iA^{\mu}$

前面我們介紹平移的觀念時，曾提到一向量$\vec{V}$在曲面上的封閉曲線做平移，當平移一周後，最初和最後的向量$\vec{V}$會產生一夾角，現在我們看看這夾角和曲面的彎曲結構有什麼關係。

我們在參數爲U、V的平面上，將向量$\vec{A}$分別在兩個不同的路徑做平移，如圖一。



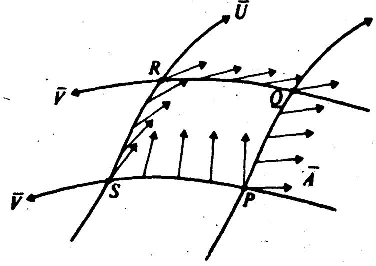
圖一：$\vec{A}$沿RQP和沿RSP平移後向量$\vec{A}$不變。

當向量$\vec{A}$自R點沿RQP的路徑平移至P點時我們稱它爲$\vec{A}^1$，如果它由R點出發沿RSP路徑平移至P點時，我們稱它爲$\vec{A}^2$。那麼$\vec{A}^1$和$\vec{A}^2$差異，可從平移的定義來計算，即

$$\vec{A}^1-\vec{A}^2=d_u d_v(\nabla_v\nabla_u-\nabla_u\nabla_v)\vec{A}$$
$$=d_u d_v[\nabla_v,\nabla_u]\vec{A}=0$$

也就是說，平面上向量A在不同路徑上平移後，其向量的方向不變。如果我們把上式最後的一項$[\nabla_v,\nabla_u]$看成是曲面的某種曲率（數學家稱爲Riemann曲率），那麼對平面而言，$[\nabla_v,\nabla_u]$的曲率爲0。

我們再看看向量$\vec{A}$在曲面上的平移，如圖二，當向量$\vec{A}$自R點沿RQP平移至P點



圖二：$\vec{A}$沿RQP平移後的方向與$\vec{A}$沿RSP平移後的方向並不一致。

，它的方向和$\vec{A}$自R點沿RSP平移至P點時的方向並不一致。如果我們仍然用參數U、V來描述該曲面，則$\vec{A}$沿曲面上不同的兩路徑從R平移到P，其向量平移後的差異爲

$$\vec{A}^1-\vec{A}^2=d_u d_v[\nabla_v,\nabla_u]\vec{A}$$

因爲曲面上共變微分的交換子$[\nabla_v,\nabla_u]$不爲零，很自然的我們就可以把$[\nabla_v,\nabla_u]$視爲曲面上的一種曲率（也稱Riemann曲率）。

我們再來探討一下上面談到的Riemann曲率與電磁規範理論之間的關係。我們仍然以帶電質點的系統爲例。在無規範位（或規範場）的平閔氏空間裏，我們考慮波函數Ψ在(x^μ,x^ν)平面上沿著二個不同路徑的變化。其中一路徑爲$(x^\mu,x^\nu)\to(x^\mu+dx^\mu,x^\nu)\to(x^\mu+dx^\mu,x^\nu+dx^\nu)$另一路徑爲$(x^\mu,x^\nu)\to(x^\mu,x^\nu+dx^\nu)\to(x^\mu+dx^\mu,x^\nu+dx^\nu)$。當$\Psi$從$(x^\mu,x^\nu)$徑由上述的兩路徑移至$(x^\mu+dx^\mu,x^\nu+dx^\nu)$，其差異爲零

$$d\sigma_{\mu\nu}[\partial^\mu,\partial^\nu]\Psi=0$$

（$d\sigma_{\mu\nu}$代表(x^μ,x^ν)平面上的平行四邊形小面積元）

這就好像向量$\vec{A}$在平面上沿不同的兩路徑平移後，向量$\vec{A}$保持不變。但是如果閔氏空間中加了一個規範位（或規範場），那麼整個空間就像被扭曲了似的。如果我們仍然要計算具有規範位系統的波函數，當它沿著上述兩個不同路徑所產生的差異，那麼我們就要把∂^μ和∂^ν分別用共變微分D^μ及D^ν代替，因此而得Ψ的差異爲

$$d\sigma_{\mu\nu}[D^\mu,D^\nu]\Psi=-id\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Psi\neq0$$

很清楚的我們可以看到外加的電磁場，對一個空間所產生的變化。由上面最後的二個式子，我們可以做這樣的幾何解釋：閔氏空間上的平面(x^μ,x^ν)，當外加一個規範場時，將使(x^μ,x^ν)扭爲曲面，所加的規範場$F^{\mu\nu}$就相當於曲面上的Riemann曲率。因此物理學家，也把$F^{\mu\nu}$稱爲規範曲率。

接著我們看看在規範變換下的電磁系統

會有什麼改變？當我們引入一個規範函數 f，使規範變換後的新規範位 A'^{μ} 爲 $A^{\mu}+\partial^{\mu}f$，那麼新的共變微分就多了一項，即

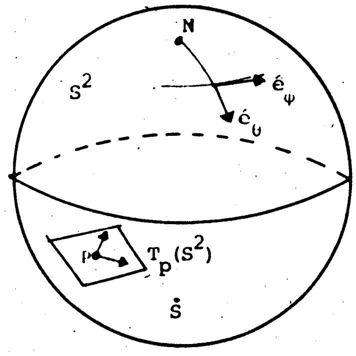
$$D'^{\mu}=\partial^{\mu}-iA^{\mu}-i\partial^{\mu}f$$

從Maxwell的電磁理論，我們知道一個事實；那就是帶電質點的運動不因規範變換而改變。從幾何的觀點上看，當我們改變了共變微分的描述式，並不一定改變曲面上的彎曲結構。電磁理論的規範變換就是最好的例子。如果我們用規範變換後的共變微分式來計算新的規範曲率，我們發現它並沒有改變，與舊有的規範曲率完全相同；即

$$[D'^{\mu}, D'^{\nu}]=[D^{\mu}, D^{\nu}]$$

因此電磁系統的規範對稱性或規範不變性，其實就相當於幾何上的Riemann曲率的不變性。

接著我們再來介紹規範理論的幾何化中經常使用的一個名詞——纖維束——。纖維束的含意非常廣泛。我們以曲面爲例，一個平滑的曲面M上的一點P（U，V）一定可以找一個通過P點的平面而與曲面相切，我們稱它爲P點的切平面，記爲 T_P。我們有時也稱這切平面爲曲面P點上的纖維，如果我們考慮曲面上所有點上的纖維，那麼這些纖維就可以拼湊成一個纖維束。由切平面構成的纖維束有時簡稱它爲切束。原來的曲面稱爲基礎空間，或簡稱基礎，它是個二維空間。因爲任意一點上的纖維所代表的也是一個二維的切空間，所以二維曲面爲基礎的切束是一個四維空間。其實我們不一定要取曲面上P點的切平面做爲P上的纖維，如果我們取P點上垂直於曲面的法線爲纖維，那麼所有曲面上的纖維也可以構成一個纖維束，我們稱它爲法束。在二維曲面上的一點，它的纖維是一維空間的法線，所以這個法束是一個三維空間。從這兩個例子，我們歸納出一個結論，纖維束的維數，是基礎空間的維數和纖維所代表的空間的維數之和。我們再舉一個例子，假設我們在基礎空間上的一點取一個基底架構爲纖維，例如圖三代表在圓球面上的一點取一個定向的垂直基底（$\hat{e}_{\theta}, \hat{e}_{\psi}$）爲纖維。這種由基礎上所有點的基底架構爲纖維所構成的纖維束，我們稱之爲架構束。



圖三：圓球面上的P（θ，ψ）可以取一組空向基底（$\hat{e}_{\theta}$，$\hat{e}_{\psi}$）爲P點上的纖維。

架構束的一個纖維所代表的基底其實可以有不同定向的選取，假設我們在同一點上有二組不同定向的基底，那麼這兩組之間的關係僅是一個旋轉變換。這旋轉變換本身就構成一個群。我們甚致可以把群本身當做該點上的一個纖維。這種以群爲纖維所構成的纖維束，數學家把它稱爲主束，與規範理論最有密切關係的就是這個主束。

我們回頭再來看看電磁規範理論，當規範位爲 A^{μ} 時，對波函數取共變微分爲

$$D^{\mu}\Psi=(\partial^{\mu}-iA^{\mu})\Psi$$

經規範變換後 $A'^{\mu}=A^{\mu}+\partial^{\mu}f$，所以用新的規範位 A'^{μ} 對新的波函數 Ψ' 取共變微分時，則得

$$D'^{\mu}\Psi'=(\partial^{\mu}-iA^{\mu}-i\partial^{\mu}f)\Psi'$$

前面我們已說明過規範變換並不改變空間的曲率，因此當 $D^{\mu}\Psi=0$ 表示 Ψ 平移時，$D'^{\mu}\Psi'=0$ 也表示在同一個曲面上作平移，我們馬上可得到

$$\Psi'=e^{if}\Psi$$

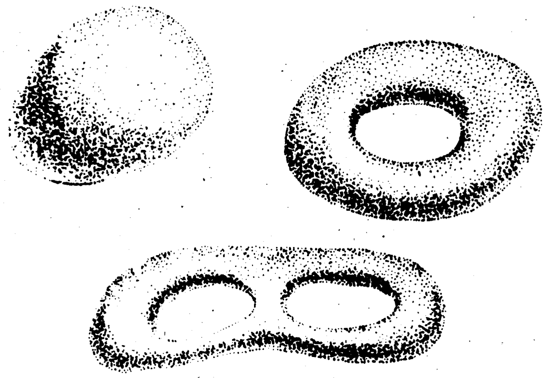
的關係式。這個結果和量子力學所得到的結果完全一致，因爲規範變化並不改變量子系

統的狀態，所以描述量子系統的波函數，在規範變換時，波函數只可能改變一個相位，而這相位恰好就是所選的規範函數 f 。

對應於不同的規範變換，只是把波函數乘以不同的相位 e^{if} 。因此電磁規範變換和 U(1)群同構，我們把它稱爲U(1)規範群。它是一個可對易群，所以這個理論也稱爲可對易規範理論。如果我們把U(1)規範群當做閔氏空間上的纖維，那麼從幾何的觀點來說，電磁的規範理論就是以閔氏空間爲基礎的U(1)主束了。

目前理論物理學家比較有興趣的研究對象是更複雜的主束，也就是說，他們想利用比較複雜群的纖維束來處理具有較高規範對稱性的物理系統。這些較複雜的群，一般而言都是不可對易群。這些複雜的群所對應的不可對易規範理論已用來分析不同的粒子物理系統。譬如Yang-Mills 的 SU(2)規範理論，用來研究質子和中子的同位旋對稱性；Glashow-Salam-Weinberg 的 SU(2)× U(1)的規範理論，用來統一電磁和弱交互作用；色動力學的 SU(3)規範理論，用來處理夸克之間的強交互作用。物理學家們甚至於利用四維的歐氏空間之純 Yang-Mills 規範理論，來研究夸克的束縛現象。

討論纖維束最有趣而且也是最重要的一個問題是探討纖維束的局部和大域的拓樸性質。如果給定我們一個基礎空間和其上的纖維，我們能不能用它們去組成不同的主束？要回答這個問題，我們就要知道局部的結構和大域拓樸的關係。我們先看看與這個問題性質相似的曲面問題。當幾何學家研究曲面時，他們可以分析它的局部特性而了解曲面的大域結構。這正如同我們不需要去繞行地球一週才可以說明地球是圓的情況一樣。能從曲面的局部去分析而了解大域結構的性質，要歸功於Gauss 、Bonnet 兩人的貢獻。他們發現對一個封閉曲面的高氏曲率做面積分，即 $\int K d\sigma$，其値爲 4π 的倍數（可以爲 0 或負倍數），並且也是一個拓樸的不變量。換句話說，只要我們不要撕破球面，不管我們怎樣去扭它、壓它、或拉它，曲面的外形雖然不一樣，但 $\int K d\sigma$ 的值不變，永遠是 4π 。但是不同拓樸的曲面，$\int K d\sigma$ 的值可以爲 0 、-4π 、-8π……等等。因此這個 Gauss-Bonnet 定理，可以把所有的曲面做分類。每一類都有相同的 $\int K d\sigma$ 不變量。我們把不同類的曲面稱爲 g 一柄封閉曲面，g 爲 0 、1 、2 、……等整數。g ＝ 0 稱爲無柄曲面，它可以是一個球面，或是一個碗面，或是一個枕頭面。g ＝ 1 稱爲單柄曲面，如圓環面，或是單耳（單柄）的杯子表面。圖四是 g ＝ 0 ，1 ，2 三類曲面的代表。



圖四：g ＝ 0 爲球面，g ＝ 1 爲單圓環面，g ＝ 2 爲雙環面。

這些曲面對局部的曲率做整個面積分，不同類別的曲面可用不同的拓樸標數（ 1 − g ）來表示。

$$\int K d\sigma = 4\pi(1-g)$$

那麼主束或一般纖維束是否也可以仿照上述處理曲面的方法去分類呢？這幾十年來，由Chern（陳省身）、Pontryagin 、Stiefel 和Whitney 等人的研究，也提供了對主束和一般纖維束的分類方法。利用幾何學家發展出來的分類技巧，荷蘭理論物理學家 ’t Hooft 以閔氏空間爲基礎 SO(3) 主束

來分析不可對易規範理論下的磁子系統（magnetic monopole）。發現這個主束的分類之拓樸標數，恰好與該磁子系統的總磁荷強度成比例。蘇俄的 Belavin-Polyekov-Schwartz-Tyupkin 則以四維歐氏空間爲基礎的 SU(2)主束爲研究對象，發現歐氏空間裏的 SU(2)規範場的組態也可以用拓樸的方法加以分類。不同的場的組態具有不同的拓樸標數。從場的分析式再加以研究時，也發現不同拓樸標數的場組態，代表在歐氏空間中不同數目的孤立子（有的物理學家，如李政道把它們稱爲虛粒子）。有關其他主束的拓樸性質之研究，目前也還是起步階段。

有系統的利用幾何的方法來研究規範理論，雖然才剛剛開始，但在這短短的幾年裏已有相當可觀的收獲，並且也證明它是一個非常有效的、新的研究工具。今後理論物理學家和數學物理學家在這方面的研究，將可帶給我們一個更爲遼濶的“幾何”視野。

作者：張國龍，台灣大學教授

參考資料：

有關幾何的部分，可選讀：

1. 黃武雄著的初等微分幾何講稿。台北人間文化事業出版（1978）。
2. B・Schutz 著的 Geometrical Methods of Mathematical Physics Cambridge University Press，UK（1982）。
3. C. Nasl 和 S. Sen 合著的 Topology and Geometry for Physicists。Academic Press，London（1983）。
4. 由 H. Mitter 及 L. Pittner 合編的 New Devlopments in Mathematical Physics。Springer-Verlag，Wien（1981）。

介紹性的資料可看：

1. 楊振寧著的 Lectures on Frontiers in Physics，由韓國物理學會和韓國科技基金會出版，漢城（1980）。
2. I. M. Singer：Differential Geometry，Fiber Bundles and Physical Theories，Physics Today，March 1982。

比較深入探討的資料爲

1. W. Drechsler and M. E. Mayer：Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories。Springer-Verlag，Heidelberg（1977）。
2. M. F. Atiyah：Geometry of Yang-Mills Fields。Scuola Normale Superiore，Pisa（1979）。

有關高能物理和規範理論的介紹性參考資料爲

K. Moriyasu：An Elementary Primer for Gauge Theory. World Scientific，Singapore（1983）。

比較深入的可以參考

L. Lopes 的 Gaugl Field Theories。Pergamon Press，Oxford（1981）。