● 張幼青

碎形知多少

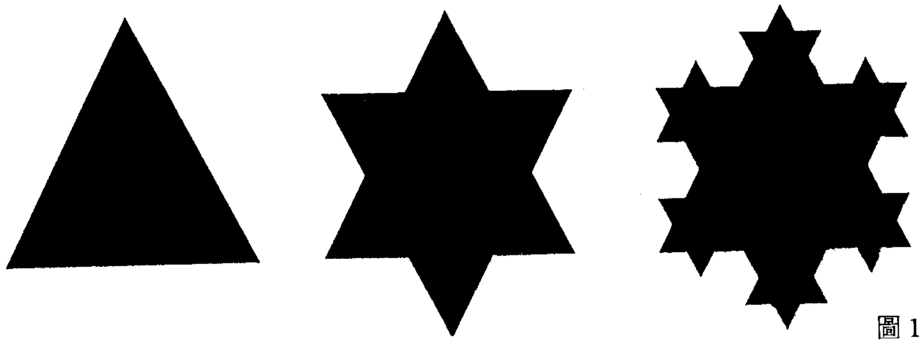


圖 1

碎形學是門新興的科學，最近才廣受人們注視。自從碎形學先鋒—法國人 B.B. Mandelbrot（註 1）從拉丁字 fractus（意爲破碎的）創出 fractal —碎形—字後，到如今也只有十年左右的歷史。然而碎形學在這短短的十年內，竟然蓬勃發展，且其理論亦廣泛地應用於宇宙的質量分佈、紊流、微分方程、物價和氣候理論等問題上，展現出驚人的魅力。

然而，碎形到底是什麼？這乃是Mandelbrot絞盡腦汁，與傳統歐幾里德幾何學中的維度觀念挑戰而得的豐碩成果。在歐氏幾何中，點是零維，直線是一維，平面是二維，立體是三維……，這些整數維度的觀念，我們看來似乎非常合理，也合乎直覺，但Mandelbrot提出非整數維度的概念，碎形學簡單地說，就是研究那些非整數維度，或其各種維度不互相一致之圖形的學問。

在我們國中、高中學過的幾何中，最常看見的就是直線、圓、三角形等規則圖形，我們也學過多項式函數、三角函數、指數對數函數等等平滑可微分的函數。然而自然界的幾何用語，顯然與我們學過的大不相同；例如山脈的形狀、天上的雲、曲折的海岸線、河中的紊流及太空中星雲分佈的情形，乍看之下，似乎是紊亂不規則，沒有什麼次序可言，我們學過的正統幾何，也完全派不上用場。誰知道亂中有序，科學家已經發現：混沌中也有規律可尋。混沌現象的數學描述，也已有不少人開始研究，如氣象學者利用它研究大氣現象。同樣，在看來雜亂無章的形狀之下，正隱藏著一個更精緻、更微妙的原理。

這個原理就是內在位似（self-similarity）。所有的碎形圖案都有一種巢狀或遞迴結構，見圖 1。較大型的圖案，是由許多小圖案組成的，可是只要我們將小圖案放得夠大，我們會驚訝地發現：它們竟然和大圖案完全一樣！就這樣，小圖案由更小的圖案組成，小圖案是大圖案的縮影，大圖案是小圖案的放大，就如同用一個模子，做出大大小小比例不同的圖案，再按次序拼在一起。因此我們導出了生成元（generator）的概念：將原始圖案（第零層）做某些「運算」，如拉長、變形，得到第一層的樣本圖案；樣本圖案上有更多段的原始圖案，我們再對這較小的原始圖案做同樣的運算，就進入第二層；愈往下做

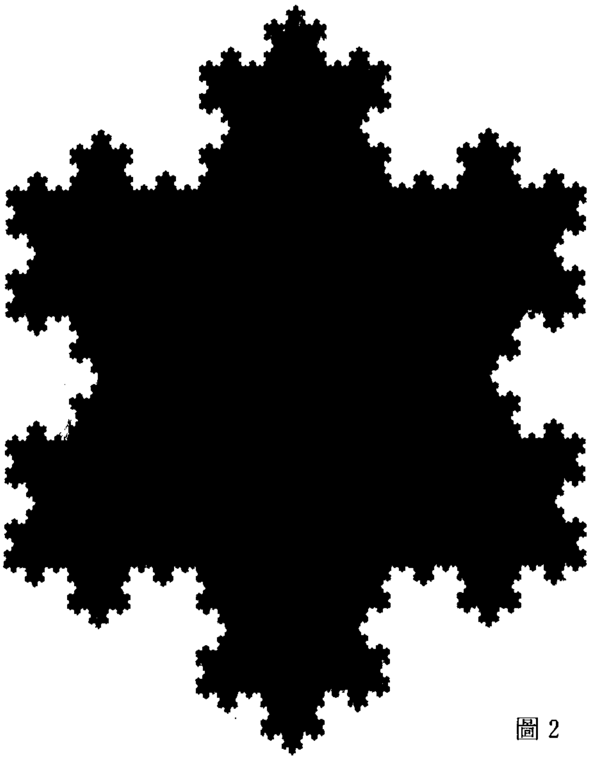


圖 2

，層數愈高，原始圖形的尺寸也愈小。最後，在層數趨近無限大時，所得的極限圖形就是碎形（見圖 2 ）。

我們從測量海岸線的長度說起。Richardson（註 2 ）曾提出這麼一個問題：「英國的海岸線有多長？」這個問題讓數學家頭痛不已，因為海岸線的長度取決於量尺的長度，用不同的量尺，測得的海岸線長度就不一樣。如此一來，怎麼定義「海岸線」呢？

凡異出版社的『殘形』一書中有個小故事：凡凡和數多星兩人受雇，測量從克魯摩波到扎弟葛拉角的海岸線長度。結果他們量到內陸河流時，發現河流不斷分支，小支流分成更細的支流，而且一直分下去，於是數多星說：不用量了，海岸線長度為無窮大。凡凡問為什麼？數多星便舉了圖 1 的例子。假設三角形邊長為 a ，作第一次運算，總長會增為原來的三分之四；作第二次運算，總長就增為原來的九分之十六；愈作下去，總長愈長，因此對極限情形的碎形而言，總長就是無限大了。令人不解的是碎形的面積竟然是有限的。當然，帶著這麼「荒唐」的結果回去，這兩個倒楣鬼鐵定被解雇了。

根據Richardson的遺稿，將不同長度的尺量度不同地方的海岸線的結果，繪在 log-log 圖上，得到的是一條條負斜率不同的直線，這就表示海岸線的形狀有某種結構存在。據Mandelbrot 指出，這結果顯示各地海岸的曲折度不但具有區域性，而且這類特質是一種規律的細節翻照過程，此即物理上的重要概念，也就是我們剛提到的內在位似。

那些表面上看來彎彎曲曲的海岸線，事實上很可能就是某種原始圖案經某一生成元作用而得的極限圖形。這種圖形叫做 Koch 曲線，隨著原始圖案和生成元的不同，我們可以得到各種Koch 曲線，這些曲線在極小的範圍內，仍然和母體的形狀完全類似。Mandelbrot 從一個嶄新的角度出發，給這些奇形怪狀的Koch圖形定義了「維度」，例如圖 1 的「Koch島嶼」海岸線的維度即是$D = \log 4 / \log 3 \doteqdot 1.2618$！這種維度確實與我們一般的概念大相逕庭，而碎形可說就是這類維數不為整數的點集合。

原來，一個幾何形體有好幾種維度定義，如 Hausdorff-Besicovitch維度和拓撲維度，Mandelbrot 對碎形的定義是「H - B維度大於拓撲維度的集合。」我們先來看看一些內在位似的例子。內在位似是指兩物體形狀相似，但大小不等的關係，例如正方形，要造成兩倍邊長的大正方形，需要 $2^2 = 4$個正方形；又如立方體，想要疊出三倍邊長的大立方體，需要 $3^3 = 27$ 個立方體。上面兩個例子中，兩物體均有相同的形狀，只是尺寸不同；我們可以把大正方形想成由小正方形組合而成，這是圖形的一種結構性質。我們一般認為：正方形是 2 維圖形，立方體則是 3 維圖

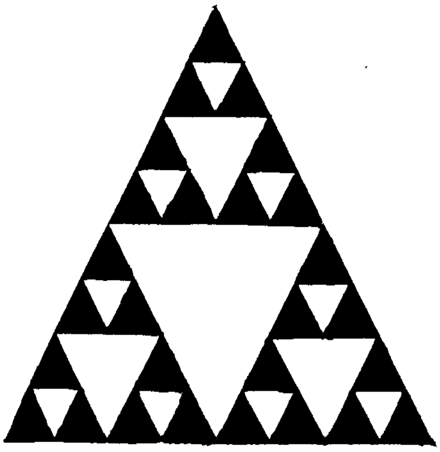


圖 3

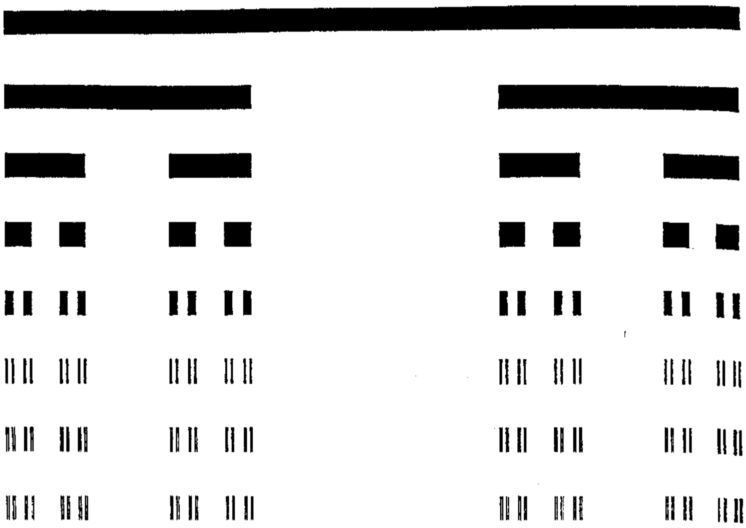


圖 4

形，所以要造成邊長爲 n 倍的正方形或立方體時，分別需要 n^2 和 n^3 個。現在我們要將這個公式推廣。見圖 3，我們可將這一組圖形視爲有某種結構關係存在。可以想像，這組圖形的極限（碎形），一定是空空洞洞，零零碎碎的，說它是 2 維，好像太多了一點，說是 1 維又嫌太少。由圖中可明顯看出：要造成邊長兩倍的大三角形，只需要三個小三角形（因爲中央的小三角形被割掉了）。一般說來，若圖形的維度是 d，要造成長度爲 r 倍的大圖形，需要 n 個小圖形時，我們有下列關係：

$$r^d = n$$

將此式取對數，得：

$$d = \log n ／ \log r$$

這個 d 就是碎形的維度。以圖 3 爲例，此圖形的碎形維度是 $\log 3 ／ \log 2 \doteqdot 1.58504$。還有很多種奇奇怪怪的碎形圖案，大家可自行計算一下，它們到底是幾維的。

歐氏幾何只適用於各種維度互相一致的圖形，對碎形而言，它的 H－B 維度大於拓撲維度。Koch 曲線顯然比直線、弧線更接近海岸線，不失爲一良好的模型。這種曲線有一個奇特的性質，就是其上每一點都是不可微分的。如圖 1，每個小三角形的頂點都不可微分，而這些點都在 Koch 曲線上。因此，若 Koch 曲線分得夠密，則曲線上每一點必定都是某一小三角形的頂點，因此不可微分。拓撲學上有一個定理，即存在一連續，但處處不可微分的函數，Koch 曲線正好具有這種性質。它也有另一個更詭異的性質，亦卽分得愈細，測得的長度也愈長，難怪用不同的尺去量海岸線，得到的長度也不同。

正如同 H－B 維度較碎形維度早出現，拓撲學中其實早就有了許多很有名的碎形物體，其中之一就是 Cantor 集。Cantor 集是拓撲學家的寵兒，它是這麼來的：取單位閉區間 [0,1]，將其三等分，去掉中間那一段，剩下兩個閉區間 [0 , ⅓] 和 [⅔ , 1]，每一段均如法炮製，去掉中間的三等分，在極限情況下，得到的許多塵埃般的小點就是 Cantor 集，見圖 4。這就是一種碎形，其維度爲 $d = \log 2 ／\log 3 = 0.6309$，當然，我們也可以製造其他的 Cantor 集。可不要小看它哦！例如聽收音機、電話或看電視，一

定或多或少會受雜訊干擾，如果把時間軸視爲一直線，則雜訊在其上的分佈，可以用Cantor 集來加以模擬而得到很好的結果。此外，在非線性或混沌的一維系統裏，某些奇異引子（ strange attractors ）的分佈情形，正好和Cantor 集一樣。我們實在難以想像：原本是純數學的東西，現在竟然有這麼廣泛的應用，目前這些硏究雖屬初步，但其發展潛力，實在不可限量。

另一個有趣的例子是Peano 曲線，它是類似碎形的「非碎形」。（Mandelbrot語）。在這些曲線中，我們可以仔細欣賞遞迴的結構之美。這種曲線有一獨特的性質，就是它可將平面塡滿：無限長的線段可以塞到有限的面積內，見圖 5。Peano 曲線擺明是要跟維度觀念對抗：正方形到底是幾維？是 2 維，還是 1 維？可見維度觀念確實非常抽象，那些定義都是人工化的。

令 $I = [\ 0,1\ ]$，代表單位閉區間，拓撲學上有一個定理，證明從 I 到 I^2（閉區間到閉正方形），有一連續且映成的函數存在，亦即正方形可用［ 0,1 ］這個線段塡滿。這個函數事實上是某一函數序列的極限，這些函數序列的圖形若畫出來，就是Peano 曲線，我們舉兩個簡單的例子。見圖6，f_0 是一三角形的路徑，此即原始圖案；生成元爲 f_1，係將三角形路徑變形而得。從 f_0 變到 f_1，三角形路徑已變爲 4 條，到 f_2 時變爲16條，到 f_3 則變成64 條‥依此類推，故我們可推斷 f_n 有 4^n 條三角形路徑。n 愈大，可以想像圖形一定愈來愈密，其極限情形，因爲振盪得太過激烈而無法繪出，正所謂「只可意會，不可言傳。」這些曲線都是閉區間［ 0,1 ］的像，因此我們說在極限情形下，Peano 曲線將正方形塞滿。讀者可自行驗證 $d = \log 4 / \log 2 = 2$。

另一個例子是一組生成元，見圖 7。讀者可驗證在每一種情形中，維度均爲 2，更複雜的情

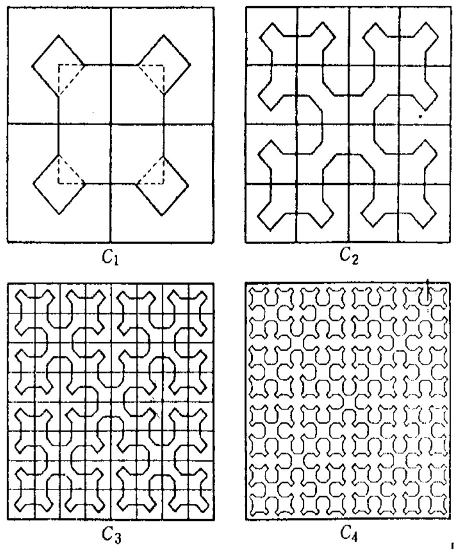
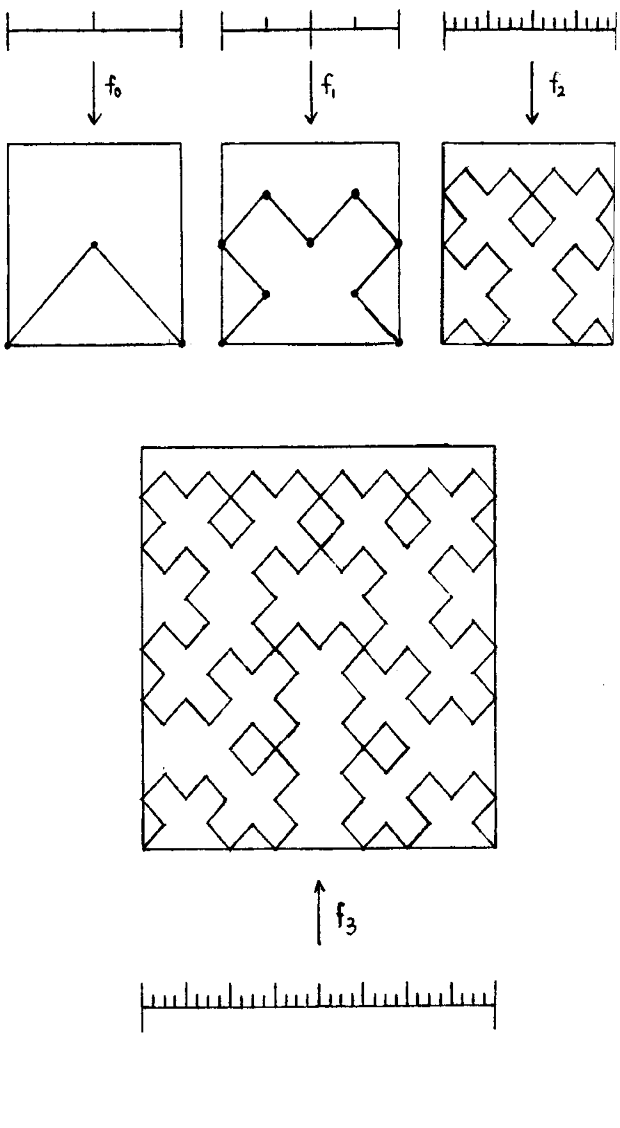


圖 5

圖 6



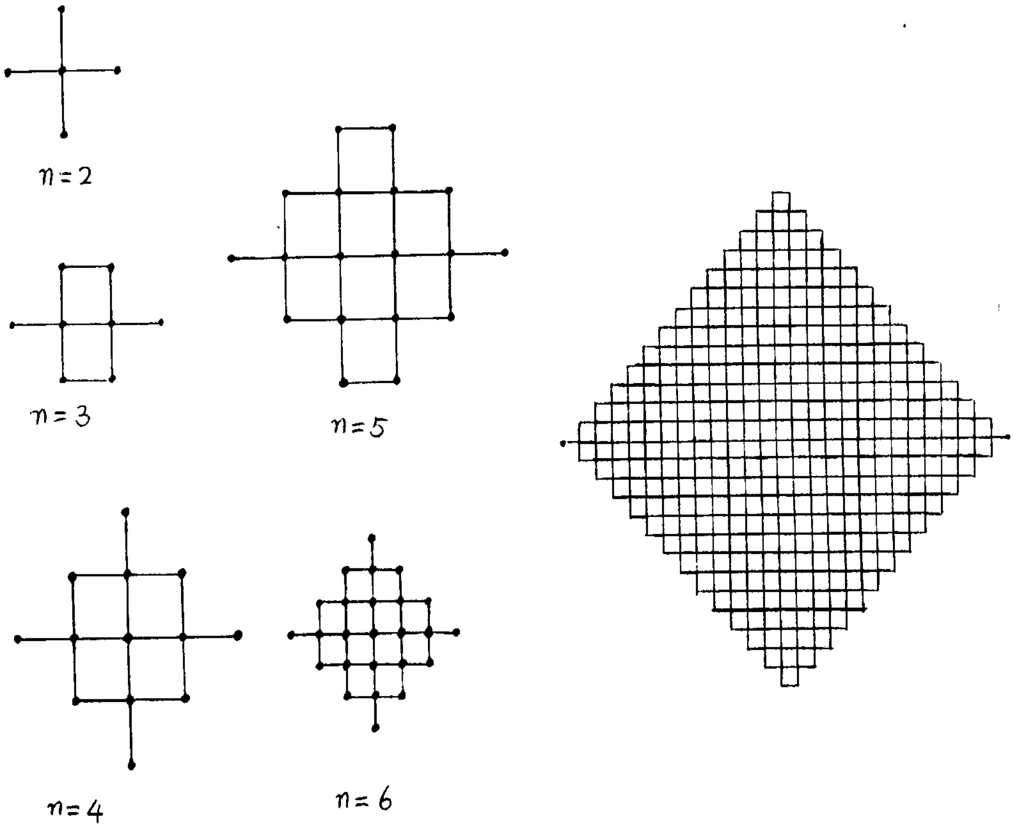
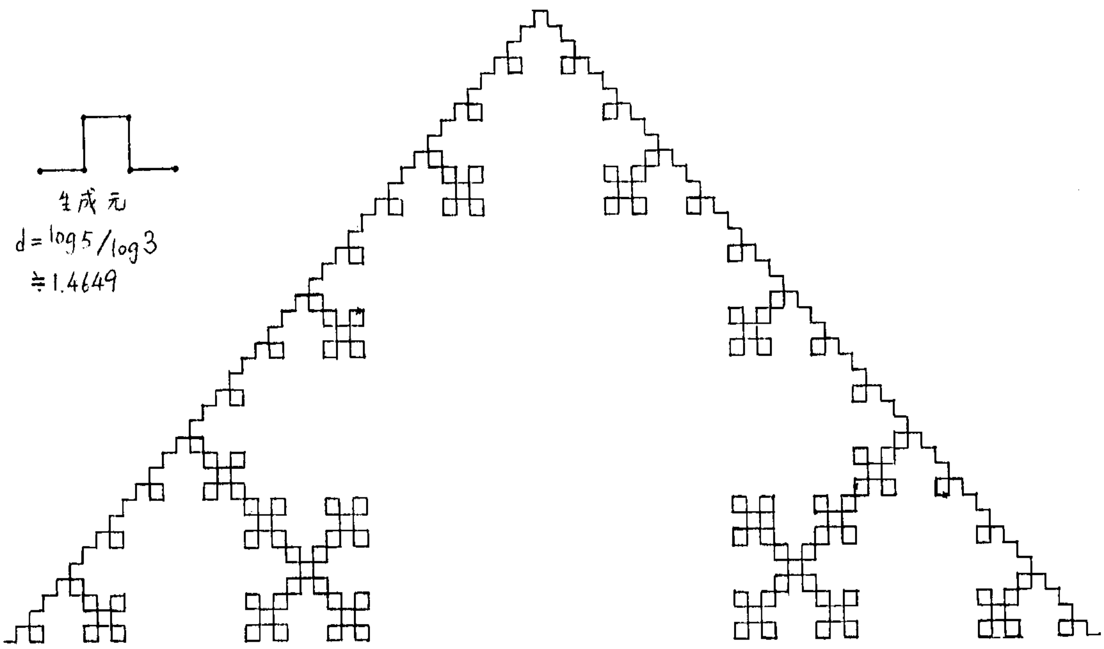


圖 7

圖 8



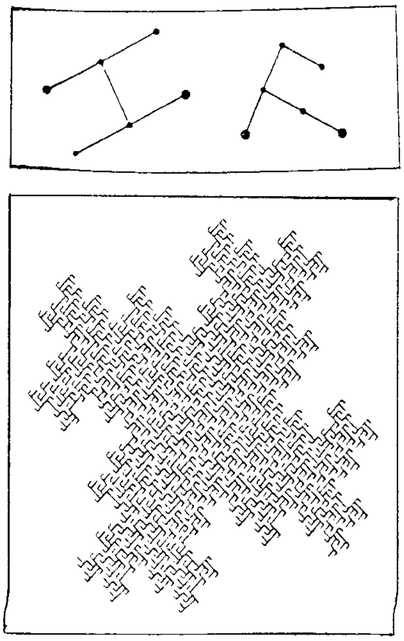


圖9

形也不難繪出。除了這些方方正正的生成元，我們也可以用一些彎彎曲曲的圖案（圖9、10），讀者請自行驗證它們產生的 Peano 曲線填滿平面。我們以這些生成元來繪 Peano 曲線，畫得愈細，就如同把坐標的刻度刻得愈密，理論上，對 Peano 曲線塞滿的正方形中的任一點，均可找到夠密的曲線，使點與曲線的距離爲任意小。

現在我們要展現一件更驚人的事實：Cantor 集長度爲零！怎麼可能呢？拓撲學上，Cantor 集被分類爲不可數無窮，爲什麼一個有無窮多點的點集，長度竟然是零呢？這是因爲 Cantor 集太散了，在它裏面找不到任何一個區間。我們也可以這麼看：第一次截掉中央的三等分，長度爲 $1/3$；第二次截掉兩段較小的（長度爲原先的 $1/3$）三等分，長度爲 $2\times(1/3)^2=2/9$；第三次截掉的長度是 $2^2\times(1/3)^3=4/27$，依此類推，第 n 次截取的長度爲 $2^{n-1}\times(1/3)^n$，故 Cantor 集的長度爲：

$$
\begin{aligned}
\ell &= 1-(1/3)-2\times(1/3)^2-2^2\times(1/3)^3-\cdots\\
&\quad -2^{n-1}\times(1/3)^n-\cdots\\
&=1-1/3\left[\,1+2/3+(2/3)^2+(2/3)^3+\cdots\right.\\
&\quad\left.+(2/3)^n+\cdots\cdots\right]\\
&=0
\end{aligned}
$$

換句話說，我們這樣一直割下去，最後得到的東西空空如也。再考慮一個立方體，我們將它分成27等分，拿掉中央以及與中央相鄰的小正方體（一共7個），然後對剩下的20個小正方體繼續開刀，一直做下去（見圖11）。讀者可以計算一下總共挖掉了多少體積，結果仍和 Cantor 集一樣：最後剩下的東西體積爲零。（附帶一提：凡凡和數多星後來決定爲一家乳酪工廠生產這種「殘形乳酪」，結果遭到牛乳公會和乳酪業者的抵制，大夥不妨思索個中原因。）可見在碎形的世界裏，類似長度、面積、體積的定義，必然和目前我們所知的截然不同。這種類似面積、體積的觀念叫做測度（measure），前面所提的 Hausdorff-Besicovitch 維度，就是用一種特殊的H－B測度來定義的：對一點集而言，若對 $D>d$ 的H－B測度爲零，對 $D<d$ 的H－B測度爲無限大，則該點集的H－B維度爲d，這個d就是碎形的維度。

有些天文學家已開始尋找適當的碎形模型以模擬宇宙。他們探討宇宙的質量分佈，首先假設所有的星系都均勻分佈在宇宙中，則在某一半徑爲R的球體內，質量應與 R^3 成正比，或質量與體積成正比，可是這樣假設會出問題：若考慮各質點間的重力時，由重力造成球體邊緣地帶質點的加速度，將遠大於測量所得的實際值。因此一個半徑爲R的球體，其質量並不是正比於 R^3，而是正比於 R^D，這個D經由測量而推算出來的結果，並非整數，而是接近1.23。因此我們可以相信：宇宙似乎不屬歐幾里德幾何所描述的情形，而是一種碎形。

一些物理問題中也出現了碎形。前一陣子科學家們研究將三個具有相同吸力強度的引力中心放在正三角形的三個頂點時，引力範圍的界線呈何形狀；他們將圖形繪在電腦顯示幕上，得到的

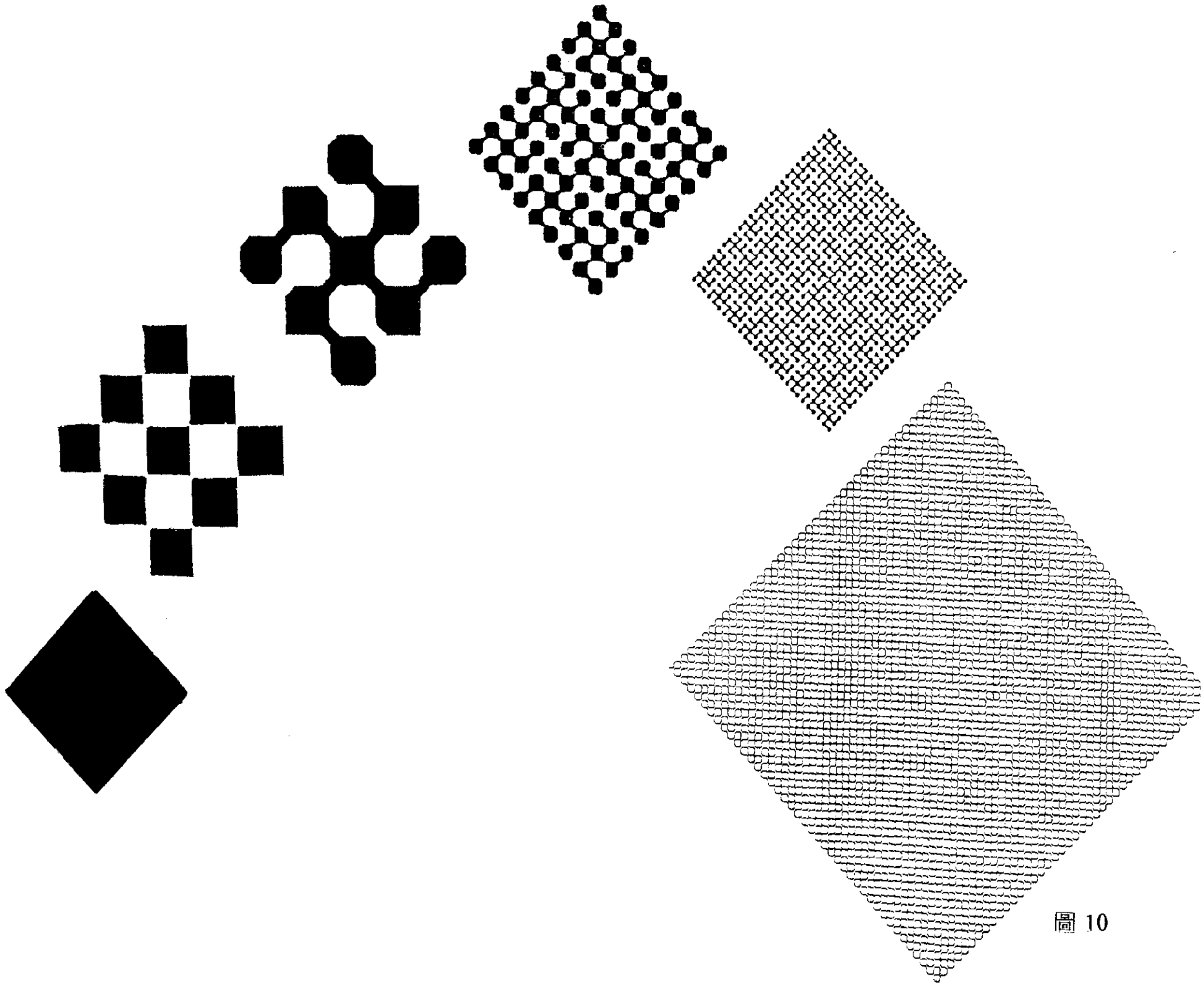
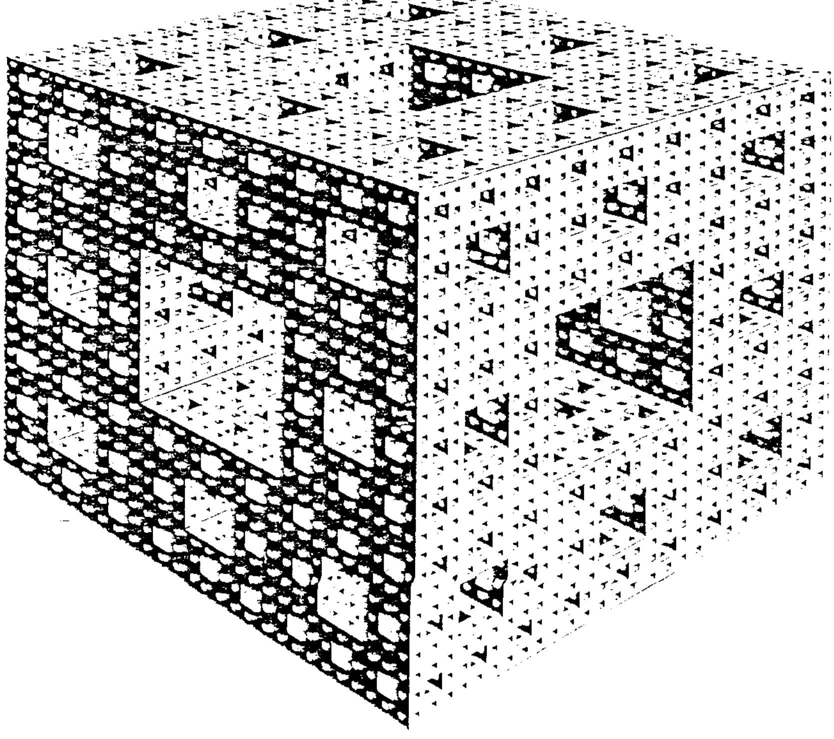


圖 10

圖 11



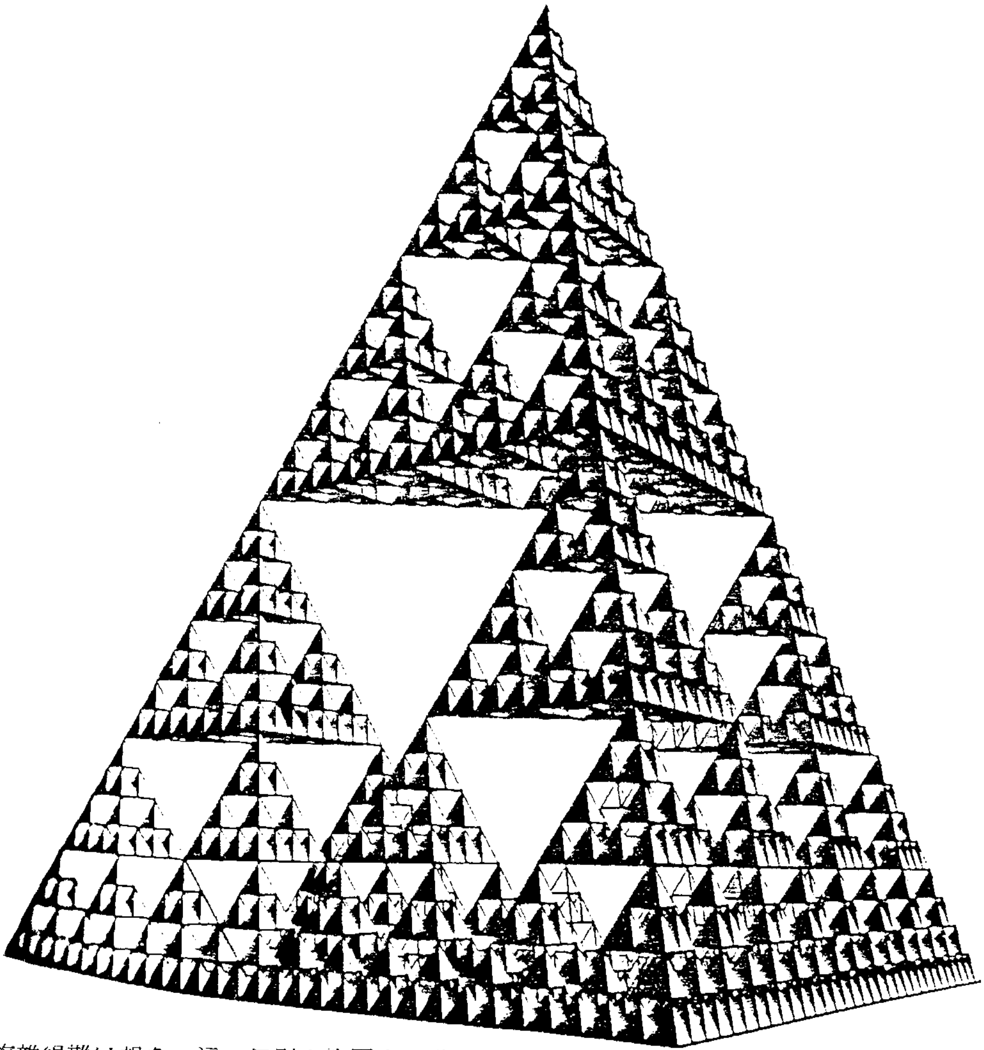
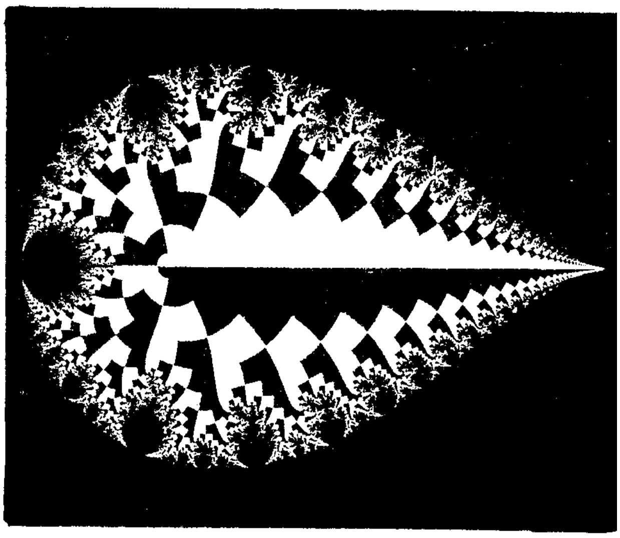


圖 12

結果複雜得難以想像，這三個引力範圍中的點糾纏在一起（詳情請見牛頓雜誌 43 期:碎形幾何學之美），大出人們意料之外。西德不來梅大學一個研究小組，在研究磁體磁化狀態和非磁化狀態之間的「相變現象」時，也會出現碎形。纖維也是一個很有趣的問題：它是維度多少的碎形呢？自然界中，到處都充滿了碎形，俯拾即是，因此這門學問更大有可爲。

圖 13



碎形學的發展也刺激了電腦製圖，這兩者眞是相輔相成。經由電腦將影像不斷放大，我們才知道碎形圖案有所謂的「遺傳訊息」，即碎形的細部能反覆顯現與原來圖形相同的形狀，其縮小複製圖至細部爲止，仍包含著所有的遺傳訊息。數學家已設計出一種反覆代入計算的演算法，在複數平面上取一點Z，然後代入某一公式，如Z

$\rightarrow Z^2 \rightarrow \mu$，（$\mu$為適當選取的複數），得到新的Z，再繼續代入求下一個值。將所有的點繪在顯示器上，就得到Mandelbrot 集合，只要起始值Z的選擇適當，|Z| 就會是有限值。我們得到的點集是一種更複雜的碎形，但它看起來反而更接近山脈、島嶼的形狀呢！根據最近的研究，大Mandelbrot 集合的周圍有許多構造完全相同的小Mandelbrot 集合，且這兩個集合是相連接的。讀者不妨自己設計一個程式，選一個映射公式，實地繪出來，瞧瞧Mandelbrot 集合的廬山眞面目。

Mandelbrot 最愛舉下面的例子，說明空間維度的分別並非一成不變：一堆線團放在離眼睛一百公尺處，僅得一點——零維：移到十公尺處，我們看到的是球形——三維；再移到一公尺處，一條條線非常清楚——一維；拿到眼前，可以淸晰地看到線團的質料——又回到三度。再下去，再下去……？如此一來，各種維度交互出現，線團的維度豈非難以定義？

上面拉拉雜雜地談了許多，目的只是要介紹碎形學————門正在蓬勃發展中的學問。它是自然界幾何形狀的代言人，對許多物理問題而言，可以提供簡單但強有力的模型。也許正如Leo P. Kadanoff 所說：「要對各種模型作電腦模擬，然後將結果與眞實世界相比較，實在太容易了，然而若沒有整合的原理，這個領域很可能衰退成一些靈巧的分類和一個充滿各種有趣樣本的動物園。僅管在此領域的根基——現象學上的觀察結果是美麗、雅緻的，碎形物理學在很多方面仍有待繼續研究發展。」

註1：Benoit B.Mandelbrot，法國人，加州理工學院航空碩士，巴黎大學數學博士，曾任敎多所大學，目前主要在IBM的Watson研究所工作。對碎形幾何學有獨到的研究，並創出 fractal 一字。著有「Fractals ,Form ,Chance and Dimension」、「The Fractal Geometry of Nature」等書。

註2：L.F.Richardson，1881～1953。出生於英格蘭的新堡，硝皮匠之子，天才型科學家。二十歲從J.J.Thomson在國王學院習物理，四十七歲又從倫敦大學獲得心理學學位，數值天氣預報的創始者，對戰爭與人類心理的關係特別感興趣。涉獵極廣，凡物理、數學、流力、氣象、海洋、心理學，皆有極端新奇而深刻的貢獻。

參考資料

1. B.B.Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature , W.H.Freeman and Company , 1982（數學系系圖有此書）
2. PAR IAN STEWART著，朱建正譯　殘形，凡異出版社出版
3. James R.Munkres, Topology : a first course
4. 科學月刊74年10月份，791～793頁，林和　碎學先鋒——孟戴布洛特
5. 科學月刊75年3月份，176～180頁，楊慶祥　什麼是碎形學？
6. 牛頓43期，28～51頁，劉滌昭譯　碎形幾何學之美
7. Leo P.Kadanoff ,Fractals :Where's the physics ?
Physics Today / February 1986 , P.6～7

註：附BASIC程式一份，本程式可在IBM PC, XT/AT等機種上執行，畫出原始圖案為

〔0，1〕單位閉區間，生成元為：

的各階Koch曲線，輸入階層可選為1～6。讀者若對碎形的電腦繪圖有興趣，可參閱Mc Gregor與Watt合著之The Art of Graphics for the IBM PC, Addison-Wesley publishing Company, chap 6 . Recursions, fractals, and natural patterns。此書題材豐富，書中程式頗有研究價值，是一本不可多得的好書，特鄭重推薦。

```
10 REM Triangular recur sive diagram
20 DEF FNF(X) = X+1-INT(X/12)*12
30 DEF FNR(X) = X-1-INT((X-2)/12)*12
50 AU = 3.1415926#  /6
60 INPUT "LEVEL=";N: N=ABS(N)
70 IF N<>INT(N) OR N>6 THEN 60
80 INPUT "LENGTH=";R
90 IF R<50 OR R>200 THEN 80
91 R1=R
92 DIM F(364),S(364),MX(364),MY(364),VX(364),VY(364),D(364)
95 SCREEN 2
100 FX=-R/2: FY=-R*SQR(3)/6: SX=R/2: SY=-R*SQR(3)/6
102 F(0)=0: S(0)=1: LP=0: UP=0: D(0)=12
105 LINE (320+FX, 100-FY )-(320+SX, 100-SY )
107 IF N=0 THEN 230
110 PF=0: PS=1: T=-1: GOSUB 300: R1=R1/SQR(3)
117 L=1:IF N=L THEN 230
130 FOR CP=LP TO UP
140     D=D(CP): D =FNR(D)
150     PF=F(CP): PS=CP*4+2: GOSUB 300
160     FOR I=1 TO 4: D=FNF(D): NEXT I: PF=CP*4+3: PS=CP*4+2: GOSUB 300
170     FOR I=1 TO 4: D=FNF(D): NEXT I: PF=S(CP) : PS=CP*4+2: GOSUB 300
180 NEXT CP
190 IF L=N THEN 230
200 L=L+1: LP=UP+1: UP=T: R1=R1/SQR(3)
210 INPUT A$ : GOTO 130
230 INPUT A$ : SCREEN 0
240 INPUT "DO YOU WANT TO DRAW IT AGAIN(Y/N)";A$
250 IF A$="Y" THEN RUN
260 IF A$="N" THEN END
270 GOTO 240
300 REM Draw the curve
310 IF PF=0 THEN X1=FX: Y1=FY: GOTO 360
320 IF PF=1 THEN X1=SX: Y1=SY: GOTO 360
330 P=INT(PF/4): Q=PF-4*P
340 IF Q=2 THEN X1=MX(P): Y1=MY(P): GOTO 360
350 IF Q=3 THEN X1=VX(P): Y1=VY(P)
360 IF PS=0 THEN X2=FX: Y2=FY: GOTO 410
370 IF PS=1 THEN X2=SX: Y2=SY: GOTO 410
380 P=INT(PS/4): Q=PS-4*P
390 IF Q=2 THEN X2=MX(P): Y2=MY(P)
400 IF Q=3 THEN X2=VX(P): Y2=VY(P)
410 REM *** WE START TO PLOT AND CALCULATE ***
420 X3=(X1+X2)/2: Y3=(Y1+Y2)/2
430 X4=X3+R1*SQR(3)/6*SIN(D*AU): Y4=Y3+R1*SQR(3)/6*COS(D*AU)
440 X5=X3+R1*SQR(3)/2*SIN(D*AU): Y5=Y3+R1*SQR(3)/2*COS(D*AU)
450 T=T+1
460 IF L=N THEN 480
470 D(T)=D : MX(T)=X4: MY(T)=Y4: VX(T)=X5: VY(T)=Y5: F(T)=PF: S(T)=PS
480 LINE (320+X1, 100-Y1 )-(320+X2, 100-Y2 ),0
500 LINE (320+X1, 100-Y1 )-(320+X4, 100-Y4 ),3
510 LINE (320+X5, 100-Y5 )-(320+X4, 100-Y4 ),3
520 LINE (320+X2, 100-Y2 )-(320+X4, 100-Y4 ),3
530 RETURN
```