全知夢想？不存在的

True

完美理論

B95
林鼎祺

False

全知的夢想

那時，天下人的口音、言語都是一樣。他們往東邊遷移的時候，在示拿地遇見一片平原，就住在那裡。他們彼此商量說：「來吧！我們要做磚，把磚燒透了。」他們就拿磚當石頭，又拿石漆當灰泥。他們說：「來吧！我們要建造一座城和一座塔，塔頂通天，為要傳揚我們的名，免得我們分散在全地上。」耶和華降臨，要看看世人所建造的城和塔。耶和華說：「看哪，他們成為一樣的人民，都是一樣的言語，如今既做起這事來，以後他們所要做的事就沒有不成就的了。我們下去，在那裡變亂他們的口音，使他們的言語彼此不通。」於是耶和華使他們從那裡分散在全地上；他們就停工，不造那城了。《聖經・創世紀第十一章》

這是聖經中巴別塔的故事，冒犯天威的人們被上帝打亂了語言而宣告解散，夢想的通天之塔也淪爲一片焦瓦。這是否意味著上帝擔心人類的能力會無止境地發展以至於「爲所欲爲」，才動手將之毀去呢？其實人類從未放棄向上挑戰，數百年來，人們不斷地想創造、改革、進步，也的確越來越有能力，越來越有長進；學會用火、製造器械，走向工業革命、發展電力，各種進步隨時間演進，如浪潮般一波波襲來。於是人們開始思考，或者說，一直都在思考：究竟人類的進步有沒有極限？人類有沒有辦法達到全知與全能？

近三百年來的科技發展讓人類嚐到了勝利的滋味，我們控制自然、創造文明，而且飛快地持續進步。我們似乎找到了某種方法，只要順其而行，任何事物遲早都能被了解，問題只在時間長短罷了。不再有任何疑惑需要歸之於無形、歸之於信仰、歸之於超然，我們可以清楚解釋萬物的原理和成因。是的，創世紀到今天，步入雲端、翱翔天際已非難事，但全知的夢想真的會有實現的一天嗎？

邏輯的語言

在我們討論人類的「全知夢想」之前，先讓我們做點功課，瞭解邏輯的起源和形式。日常生活中，我們常常說「某某人很沒有邏輯」，當我們這樣說，可能是指某人說的話自相矛盾、前後不一致，也可能是他的上下文毫無關聯、無從推理，但這並非我們在此討論的「邏輯」。

「邏輯」，又稱做「理則」，源自希臘的λόγος。邏輯所關注的不是單一語句是否正確，而是推論和證明有效與否。中世紀時期，邏輯成爲哲學家的主要焦點之一，他們看重與哲學相關的邏輯分析。現代邏輯則流傳自古希臘傳統，其最基礎形式建構在論證上，例如亞里士多德所提出的「三段論」（Syllogism）。常常被舉出來的例子是：

所有生命都有價值。

即使謀殺犯也有生命。

所以，即使謀殺犯也有價值。

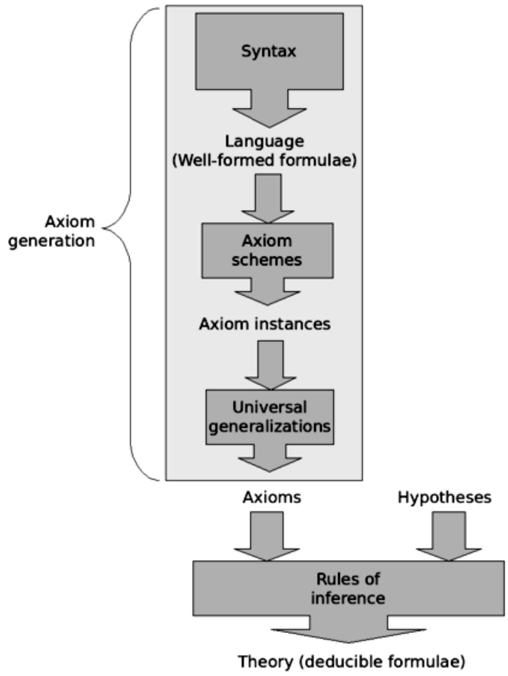
在三段論中，第一句話稱爲「大前提」（major premise），第二句爲「小前提」（minor premise）。如果這是一個「有效論證」，則前提在邏輯上蘊涵了第三句話——我們稱爲「結論」（conclusion）。也就是說，在有效論證中，前提的真保證了結論的真。必須注意「論證是否有效」與「結論是否爲真」是兩件不同的事，在一個有效的三段論中，若存在假的前提，則可能會出現假的結論。同樣的道理，若是推論過程有問題，即便結論是真，仍然是個無效論證。各位對這些基礎邏輯概念應該都十分清楚，筆者在此不多討論，如果各位有興趣可以修習哲學系開設的「邏輯丙」課程。

邏輯是一門非常廣泛、複雜的學門，其分支非常多，像前面所舉例的三段論是屬於「經典邏輯」（classical logic）的一部分，而與本文

較相關的則是另一個分支，「數理邏輯」（mathematical logic）。數理邏輯亦是數學的一個分支，與數學中所使用的邏輯推演息息相關，但一直至十九世紀中葉才獨立成爲一門學問。數理邏輯仍起源於亞里士多德的經典邏輯，本質上也與經典邏輯相同，但是將這些文字敘述有系統且精簡地寫成符號，而成爲數理邏輯。正如同剛剛所強調的，論證的有效性與結論真假沒有關聯，所以當我們把文字改成符號，因文字而生的真假則不復在焉，只剩下抽象的邏輯本體而已。

各位都是學科學的人，想必十分了解邏輯在數學、物理等學門上的重要性，在科學的發展上，我們要求非常嚴密且精準的邏輯。千年前希臘數學家歐幾里得所著的幾何原本就表示，只要從 23 條定義、5 個公理和 5 個公設出發，就能推出 467 條之多的定理。但說穿了也只是利用邏輯的基本想法「如果公理、公設是正確的，推導過程也正確，那麼得到的結論一定也將正確」而已。上述的基本想法在數理邏輯中有更加嚴謹的敘述，我們稱之爲「希爾伯特演繹系統」(Hilbert-style deduction system)。圖一即爲希爾伯特演繹系統的示意圖，首先要先將一般的文字語言抽象化，以生成一組符號化的公理。接著，藉著這組公理以及要求的假設（前提），我們就能推論出各樣結論。

若要誇張地說，邏輯的運用可以說是徹底改變了人類的生活。例如瓦特發明了蒸汽機，改變人類的動力來源，開啓所謂蒸氣時代與工業革命；其後不到五十年，法拉第又根據其發現的定律掌握了感應電流，開創機械能與電能間的轉換，帶領人類步入了電力時代。經由邏輯思考，我們整合理論和資訊，解釋一切事物，全知的夢想似乎近在眼前。理性邏輯的妙用瞬間衝擊了所有人的思想，幾乎將人類所擁有的能力上綱至無限。



▲ 圖一　希爾伯特演繹系統示意圖。

數學的基礎

數理邏輯的發展與獨立，其實是來自於數學家們追求「數學的基礎」。十八、十九世紀的數學家是驕傲的，在那個時代，很多流傳已久的數學難題都被解決，數學家們深信任何事物都可被證明其是非，若做不到只是自己不夠聰明或時間未到罷了。德國數學家康托爾於 1874 年創立了集合論，使數學各個分支都能形式化（formalization），數學家開始相信各個不同的數學領域，都可以建立在集合論之上。到了 19 世紀末，數學家們真的把幾乎所有的數學領域都放在集合論的基礎之上了。

針對這樣的信念，有許許多多的攻擊和挑戰以及無數的悖論、詭論被提出來，攻擊各個系統的完備性（Completeness）和一致性（Consistency），當然數學家們也盡力更新或擴充新的公設或假設以排除這些疑點。在此我們舉一些有趣悖論：

1. 全能悖論：最常出現在宗教的爭議文中，例如如果上帝是全能的，他能否做出一顆自己舉不起來的石頭，即使捨去宗教的問題，似乎「全能」本身在語句的定義上就有自身的瑕疵。

2. 說謊者悖論：有一個人說「我說的話都是假的」，這樣必將導致矛盾，因爲這句話不論是真是假都不能滿足這句敘述本身。這個悖論的現代版是「本語句爲假」，或是「下一句話是假的；前一句話是真的。」

3. 理髮師悖論：這也是個經典且古老的例子，在薩維爾村有一個理髮師，他掛出了一塊招牌規定著:「我替城裡所有不會自己刮鬍子的男人刮鬍子，我也只替這些人刮。」於是有人就問他:「你給不給自己刮鬍子呢？」

許多人爲了排除這些悖論做了許多努力，例如有人藉著區分不同層次的語言解除「本語句爲假」的悖論：塔斯基（Alfred Tarski）區分了「對象語言」與「後設語言」，以這樣的方式避免自我互相牽扯的困難；也就是說，他們認爲「本語句」與「本語句爲假」是不同層次的語言，所以不能互相帶入。

1.	一致性：對所有在系統中的事物，不會經由推論而導出兩個不同卻矛盾的答案。
2.	完備性：對所有在系統中的事物，都能被明確定義，可能定義其是真的，或是假的，或者是其他特殊定義。

不過在各個悖論之中，又以 1901 年，羅素（Bertrand Russell）提出的悖論最令數學家困擾，因爲羅素悖論直接攻擊集合論，希爾伯特知道個悖論後，說可能會有「嚴重的災難性後果」。這個悖論可以看成是理髮師悖論的數學版。首先我們定義一個集合 A＝{集合 X｜X 不屬於 X}，說白話一點，A 集合就是由所有本身不屬於本身的集合所形成的集合。羅素問：A 是否屬於 A？若 A 屬於 A，則根據 A 的定義，A 應該不屬於 A；若 A 不屬於 A，則根據 A 的定義，A 應該屬於 A。

如剛剛用以解決「說謊者悖論」的層次區分無法用在羅素悖論上，如果說「集合的集合」和「集合」無法互相帶入，看似解決的悖論卻又帶出了新問題，因爲這樣一來，自然數、有理數、實數中的零將會屬於不同類型，許多重要理論反而不得證明。最後，羅素悖論在 1908 年被解決，其法有二，一是羅素所提出的「類型論」(type theory)，另一則是公理化集合論(即在集合論中加入一些公理)。

然而，在當時除了羅素悖論之外，很多很多不同類型的悖論被提出，攻擊各個數學系統的一致性和完備性。1920 年代，希爾伯特提出了「希爾伯特計畫」(Hilbert's program) 希望能一次解決這些問題，其目標爲證明各個數學系統都是完備且一致的。他所希望證明的系統還包括實分析等等複雜數學系統，其所使用的方式是先證明數論中不包含矛盾，再以數論爲基礎證明「分析」有一致性，如此下去，終究我們可以得到一個毫無矛盾的數學系統。

這個計畫雖然龐大但帶給人們很大的希望。1930 年，希爾伯特接受哥尼斯堡（Königsberg）所頒贈的榮譽市民，在受獎的演說最後，他說了這樣的話：

我們必須知道，我們將會知道。

（Wir mussen wissen. Wir werden wissen.）

可以想見當時數學家們對於找到「數學的基礎」是多麼的有信心！

夢想的破滅

這樣的美夢並沒有持續太久，在希爾伯特接受榮譽市民的隔一年，哥德爾（Kurt Gödel）提出了不完備定理（incompleteness theorems），粉碎了數學家的夢想。哥德爾不完備定理說明了兩件事情：

1. **任何一個足夠強的一致公設系統，必定是不完備的。**
   如果一個公設集強到足以蘊涵皮亞諾算術公理（自然數公理），則其中必包含了既不能證明爲真也不能證明爲假的命題。

2. **任何相容的形式體系不能用於證明它本身的相容性。**
   爲了確立某一個系統 A 的相容性，就要構建另一個系統 B，但是 B 中的證明並不是完全可信的，除非不使用 A 就能確立 B 的相容性。

哥德爾不完備定理是非常困難且複雜的定理，筆者在此不可能將其敘述清楚。但這兩條定理確實宣告了理性邏輯必有其侷限性，不完備定理告訴我們「我們永遠不能發現一個萬能的公理系統能夠證明一切數學真理」。再講白一點，希爾伯特計畫完全被擊敗，因爲整個數學系統不可能是完備且一致的！

值得注意的是，哥德爾不完備定理並沒有說所有的公理系統都不完備，只有「足夠強」的公理系統才是不完備的，像是經過現代公理化的歐幾里德幾何即是一個完備的系統。此外，在無法定義自然數的系統之中，哥德爾不完備定理並不成立，塔斯基即證明了實數和複數理論都是完備的公理化系統。

哥德爾不完備定理所帶來最大的影響，就是告訴我們數學上可能會出現「爲真但無法被證明的命題」，數學家再也不能說：「真的一定會被證明。」當然，在哥德爾不完備定理被提出來之後，很多數學家也在尋找是否真的存在「爲真但無法被證明的命題」，一直到了 1978 年才有人找到組合學中的一個命題，它是真的，但不能用皮亞諾公設來證明，有興趣的同學可見附錄。

哥德爾不完備定理所帶來的不安全感，似乎也在我們向全知邁進的路上，放上了莫名的障礙。如今我們早已習於將理論和邏輯擴展到許多未知的事物上，但這樣的延伸真能無限嗎？真的存在所謂的完美理論嗎？我們的世界會是由一組完備且一致的物理定律所描述的嗎？在愛因斯坦的自傳裡，他提到：

> 在 12 歲時，我經驗了第二次完全不同的驚奇，在學年開始，一本講述歐氏平面幾何的書到達我的手上，裡面含有命題，例如三角形的三個高交於一點，這純不明顯，但卻可以證明，而且是如此地明確以致任何的懷疑都不可能產生。這種清澈與確定性讓我留下不可名狀的印象。至於公理必須無證明地接受，這對我並不構成困擾。無論如何，如果我能夠將證明安置在似乎不可懷疑的命題上，我就很滿意了。

物理學家也一樣崇尚基礎的理論，或稱「最終理論」（The theory of everything）。早在 1900 年，希爾伯特所提出的 23 個著名問題（Hilbert's problems），其中的第六題即爲「物理學是否能全盤公理化」（Axiomatize all of physics）。這個問題至今未解，即便解決了，我們也必須要問這組物理學公理是否也被哥德爾不完備定理所限制，其自身亦爲不完備的？

物理的最終理論

至今，人們並沒有放棄尋找物理的最終理論。自相對論和量子力學發展之後，物理學家很努力地在尋找能統一相對論和量子力學的最終理論。有許多理論被提出，但尚未經過實驗證明其正確性。當年，物理學的三大運動定律可說是由猜想而來，如何確定它是正確的呢？曾有一段時間人們對其深信不疑，原因來自於實驗的觀測足以作爲證據。但實驗雖然幫助我們增強對理論的信心，卻無法對理論的正確性做絕對的證明。果然，嚴重的後果在二十世紀初爆發，我們深信不疑的運動定律被宣告爲某些情況下的近似，其正確只有當觀測的物體運動不夠快、或者不夠微小。那麼，當最終理論被找到的時候，我們又怎能由實驗「證明」這是對的呢？

既然如此，我們是否可以不要「證明」前提？直接由實際的觀察結果來決定這個理論的前提，也就是相信經由實驗驗證的前提，是否便能避免完備性和一致性的挑戰？其實這又帶出了新的問題：我們真能獲得驗證前提所需要的資料嗎？舉例來說，弦論雖然是物理最終理論的候選之一，但一直沒有實驗能夠證明。實驗能達到怎麼樣的精確度，會不會被量子力學給限制住？這都還是我們必須面對的問題。

即便我們有了最終理論，也並不代表我們就真的能了解這個世界了。即便發現了最終理論，科學研究也不會終止，因爲我們就算知道所有基本粒子的運動方式，我們也無法預測一週後會不會有龍捲風、A 分子和 B 分子會不會發生反應、某人下一刻會做什麼動作等種種問題。化學、生物、大氣等學科之所以存在，就是因爲我們平時所面對的系統都太過複雜，並非瞭解最終理論就能解答。像是混沌理論就說明了一種我們無法精算的情況：如果有一個非線性系統在輸入數據時有一點點微小誤差，就會造成極大的影響，使誤差在系統中不斷地被放大，永遠無法得到完全肯定的答案，氣象報告之所以總是報不準，常常錯得惹人破口大罵，也是因爲大氣運動方程都是非線性方程的關係。

結語

看來，理性邏輯，以至於科學發展，也未必能讓人擁有無限的能力呢。或者說，它也只是人類許多能力中，看起來較爲發達且實用的一種，卻未必是達全知夢想的最好方法。其實除了邏輯推理，人們還擁有許多其他能力，有些甚至還未開發，又有誰能肯定邏輯是認識真理唯一且正確的路徑呢？或許不久的將來，我們的子孫們能找到更好的方法認識這個世界，例如直覺、第六感……等，那時，或許就像我們對信神拜佛的長輩們感到可笑一般，也會有些小孩指著我們這群老人說：「你們怎麼還在相信邏輯科學啊，真是迷信。」

當然，科學是好用的，或許沒有萬能的理論，但我們起碼確定一個理論能解決一部分的問題，且我們也自知能解決哪些部分，不過當我們認定科學至上的同時，也不能忘記科學所賴以爲支柱的理論與前提，是有其侷限與極限的，當有人提出科學以外的方法來認識世界，或許該以更寬闊的心胸去接受不同的聲音。也許，他們會有更好的方法來達到你我的全知之夢呢。

參考資料

1. http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_15_4_11/index.html
2. http://en.wikipedia.org/wiki/Logic
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Syllogism
4. http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_logic
5. http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert-style_deduction_system
6. http://en.wikipedia.org/wiki/Russell%27s_paradox
7. http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_program
8. http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_problems
9. http://en.wikipedia.org/wiki/G%C3%B6del%27s_incompleteness_theorems
10. http://life.fhl.net/Philosophy/phil02/rational01.htm
11. http://140.127.47.6/DLMathEd/teacher/Source/Math_history/%B4X%A6%F3%BE%C7%AA%BA%B0%F2%A5%BB%A9%CA%BD%E8/%B0%EA%A4%A4%B4X%A6%F3%AD%EC%A5%BB.htm

附錄

初等皮亞諾公設中所無法證明的問題

「九頭怪蛇」：設 m 和 n 爲自然數且 n>1，我們定義「m 以 n 爲底表示法」如下：

先將 m 寫成 n 乘冪的和，（若 m=266, n=2，那麼 $266=2^8+2^3+2^1$），現在將每個指數寫成 n 乘冪的和，（如 $266=2^{2^3}+2^{2+1}+2^1$），對指數的指數再繼續這個程序，直到表示法穩定下來，（如 $266=2^{2^{2+1}}+2^{2+1}+2^1$）。現在我們對 m 和 n 定義一個數 G_n（m）如下：若 m=0 令 G_n（m）=0，否則令 G_n（m）爲將每一個 m 以 n 爲底表示法中的 n 改爲 n+1，然後再減 1，如 $G_2(266)=3^{3^{3+1}}+3^{3+1}+2$，現在對每一個自然數 m 定義由 2 開始的 Goodstein 數列：$m_0=m$, $m_1=G_2$（m_0）, $m_2=G_3$（m_1）, $m_3=G_4$（m_2），‧‧‧‧‧‧例如

$$
\begin{aligned}
266_0 &= 2^{2^{2+1}}+2^{2+1}+2=266\\
266_1 &= 3^{3^{3+1}}+3^{3+1}+2\sim 10^{38}\\
266_2 &= 4^{4^{4+1}}+4^{4+1}+1\sim 10^{516}\\
266_3 &= 5^{5^{5+1}}+5^{5+1}\sim 10^{10000}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

同理我們對每一個 m 皆可定義由 n（n>1）開始的 Goodstein 數列。相信當我們初看到這樣的數列時，我們都會覺得這數列增加地實在很快，也就覺得這數列會這樣一直地增加下去，但令人不可思議的是 Goodstein 竟然用皮亞諾公設以外的方法證明了下面這個定理：

對任何一個 m 存在一個 k，使得 $m_k=0$；而且對任何的 m 和 n>1（即不限定 n=2），m 由 n 開始的 Goodstein 數列至終都會為零。

這個定理若用數字真的去算的話，即使是很小的數字算起來也不得了，但我們可用 3, 4, 5 分別去算算 Goodstein 數列的前十項，（$3_5=0$），也許可以感覺到這個定理有可能是對的。

繼 Goodstein 證明了他的定理後 Kirby 和 Paris 也證明了這個定理是無法用一般的數學歸納法證明，他們也藉此證明了「九頭怪蛇」這個問題，只要耐心的砍下去，雖然要砍得很久，但遲早是會砍完的。