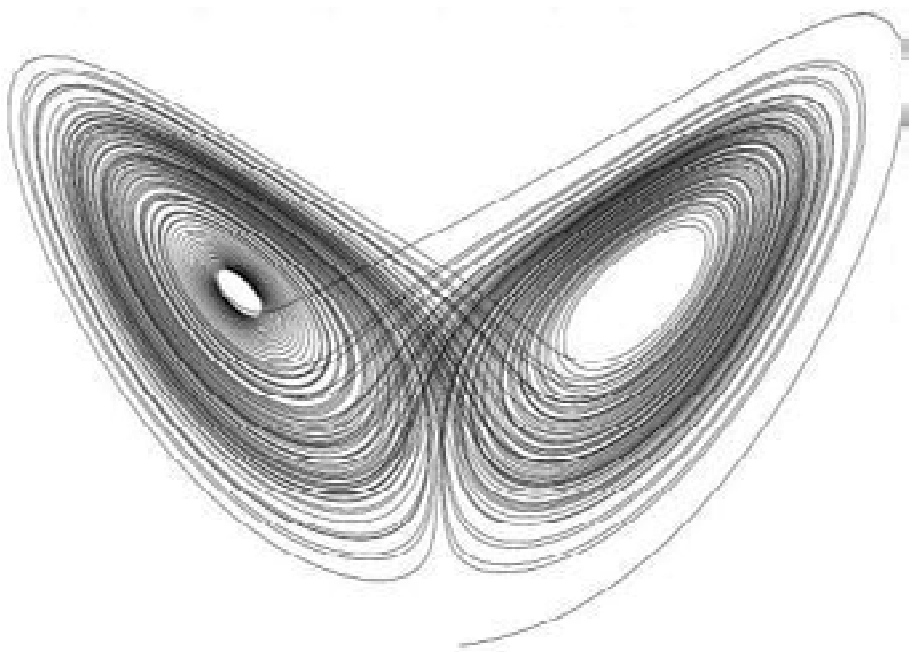
簡介混沌現象及應用

文 / 彭達剴



說到羅倫茲，你第一個會想到什麼呢？身為物理系，第一個想到的應該會是羅倫茲轉換 (Lorentz transformation)；身為洋芋片重度愛好者（或肥宅），可能還會馬上想到多倫茲公司出產的洋芋片 (Lorenz snack-world)。不過還有一個羅倫茲，雖然大家不那麼耳熟能詳，但他所發現的現象，成了科學史上的一個里程碑，而他的名言「一隻蝴蝶在巴西輕拍翅膀，可以導致一個月後德克薩斯州的一場龍捲風。」更是讓不懂科學的普羅大眾，也對這個現象充滿好奇。這個人，就是愛德華 ‧ 諾頓 ‧ 羅倫茲 (Edward Norton Lorenz)，而他所發現的現象，即是「混沌現象 (Chaos)」。

愛德華 ‧ 諾頓 ‧ 羅倫茲原本專攻數學，後改為研究天氣學，其研究工作主要是利用當時才剛發展出來的計算機，去模擬一些天氣現象。1963 年，羅倫茲發表了舉世聞名的一篇論文”Deterministic Nonperiodic Flow”〈決定性的非周期流〉，這篇論文究竟有多厲害呢？截至目前為止，論文引用數已經累積至一萬七千多次之多，由此可見其影響力。此篇論文主要闡述描述天氣現象的方程組，其中含有非線性的方程式，進行數值模擬後的結果，並分析其性質。在研究過程中，羅倫茲發現了天氣現象的不可預測性 (unpredictability)，即使兩個初始條件 (initial condition) 只有非常微小的不同，也會產生出截然不同的結果。

確定性的混沌現象，其實在 19 世紀末就已經被研究過。被稱為混沌理論之父的法國數學家龐加萊 (Poincaré)，在研究有名的三體問題 (three-body problem) 時，發現在某些情況下，系統對初始條件極為敏感。這項研究，被視為混沌理論研究的開端，而龐加萊在研究分析三體問體時使用的相圖 (phase diagram，表示平衡系統中參數之間關係的一種圖），也成為了後世研究動力學問題最常使用的方法之一。除此之外，龐加萊也為非線性動力學提供了許多非常有用的理論。但在 19 世紀末，那時計算機 (computer) 還沒有被發明，混沌理論的發展，也比不上其他諸如量子力學或相對論的發展來的亮眼。

一直到了 20 世紀中開始，人們得以用計算機進行各種繁複的計算。而羅倫茲使用計算機來模擬天氣現象，並開啟了混沌理論的研究，一直到今天。混沌還沒有一個確定的定義，不過我們通常會把具有以下特點的系統稱之為混沌系統：

長期下的非週期性 (aperiodic long-term behavior)
指一個系統若以長期來看，不存在週期 (periodic) 或準週期 (quasiperiodic) 行為。即系統不會重複之前進入之前的軌道 (orbit) 中。

決定性的 (deterministic)
指一個系統不包含隨機過程，當一個系統的初始條件被決定時，此系統之後所有的行為都已被決定。

對初始條件敏感 (sensitive dependence on initial conditions)
指系統的初始條件對於系統演化影響極大，即使兩個不同的初始條件極為接近，也會在一段時間後表現出明顯的差異性，最後漸行漸遠。通常這種差異會隨著時間以指數函數增長 (exponential growth)。

羅倫茲方程組

最著名的混沌系統莫過於羅倫茲當年發表論文時使用的微分方程組，又稱之為羅倫茲方程組 (Lorenz equations)

$$\frac{dX}{dt} = \sigma(Y - X) \qquad (1)$$

$$\frac{dY}{dt} = X(r - Z) - Y \qquad (2)$$

$$\frac{dZ}{dt} = XY - bZ \qquad (3)$$

羅倫茲方程組為一非線性方程組（因為其中的 XY 以及 XZ 項），用以描述方程組共只有三個變數（三維）。三個方程式是基於納維－斯托克斯方程式 (Navier－Stokes equations)、熱傳導方程式 (heat equation) 和連續性方程式 (continuity equation) 簡化得出。羅倫茲利用這三條方程來描述流體受熱後運動的情形。其中納維－斯托克斯方程式為描述流體在壓力場以及密度場下流體的運動行為。

值得注意的是，羅倫茲方程組幾乎可以說是最簡單的具有混沌性的動力微分方程組。要說明混沌性，首先，將一個連續的 n 變數的動力系統 (n variables continuous dynamical system) 化為以下形式

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{f}(\vec{X}) \qquad (4)$$

其中 $\vec{X}$ 為 n 維向量，其分量為 X_1，X_2，…，X_n，分別代表 n 個變數，而我們可以想像一個 n 維空間，空間中每個點都代表系統的一個狀態，而當系統隨著時間演化時，會在這個 n 維的空間中劃出一條軌跡 (trajectory)。我們可以將羅倫茲方程組分別代表 X_1，X_2 和 X_3 分量的變化，來構成符合上式的向量方程式，並且假想在三維空間中的點（$(X_1(t), X_2(t), X_3(t))$）隨著時間變化，形成軌跡，以方便我們想像羅倫茲系統的行為。至於為什麼混沌系統只存在於至少三維以上的系統呢？根據龐加萊－本迪克松定理 (Poincaré-Bendixson Theorem)，在雙變數（二維）平面上隨時間演化的軌道，如果不會靜止 (fixed point)，那麼就一定是封閉的 (closed orbit) 或者是趨向封閉的 (closed when t approaching ∞)，而封閉的軌道意味著系統會回到之前的狀態，即具有週期性 (periodic)，不可能為混沌系統。因此要達成具有混沌性的系統，至少需要三個獨立變數。

雖然羅倫茲方程組沒有解析解，不過我們還

是可以透過一些方法，如建構李亞普諾夫函數 (Liapunov function) 來分析方程組的解的性質。考慮以下之函數

$$V(x,y,z)=\frac{1}{\sigma}x^2+y^2+z^2 \qquad (5)$$

其中$V(x,y,z)$將V對時間微分，可得

$$\frac{1}{2}\dot{V}=\frac{1}{\sigma}x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z} \qquad (6)$$

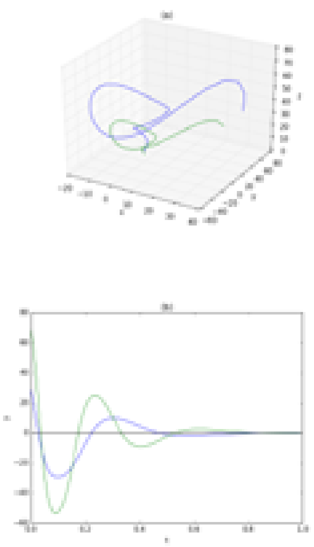
將羅倫茲方程組帶入上式，並經過化簡，可得

$$\frac{1}{2}\dot{V}=-\left[x-\frac{r+1}{2}y\right]^2-\left[1-\left(\frac{r+1}{2}\right)^2\right]y^2-bz^2 \quad (7)$$

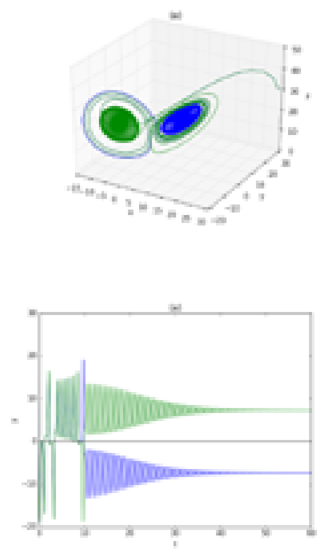
從這個式子可以發現，若$r<1$，則$\dot{V}$需恆為負，且$\dot{V}$等於零，若且為若x,y,z皆為零。由此可知，羅倫茲方程組在$r<1$的條件下，系統最後的狀態會趨向穩定，即$(x,y,z)\rightarrow(0,0,0)$。而如果將羅倫茲方程組右項分別等於零，也可以得到原點為靜止的解，且為穩定態 (stable state) 的結果，也就是在$r<1$時，整個系統不管如何開始，最後都會回復靜止的狀態（見［圖一］）！值得一提的是，在羅倫茲方程裡面的r，其實就是所謂的雷利數 (Rayleigh number)，雷利數越大，流體越容易利用熱對流 (convection) 而不是熱傳導 (conduction) 方式傳遞熱量，而熱傳導意味著流體不用運動，因此容易達成靜止狀態。

現在我們已經大概知道$r<1$的解的模樣了，那如果$r>1$呢？我們可以透過穩定性分析 (stability analysis) 知道，當$r>1$且$r<r_H$（r_H稱為 Hopf bifurcation，是系統穩定性轉變的臨界點）時，$(0,0,0)$不再是穩定的點。取而代之的是從原點分岔出去的兩個靜止點，羅倫茲稱之為C_+、C_-，其值為$(x,y,z)=\left(\pm\sqrt{b(r-1)},\pm\sqrt{b(r-1)},r-1\right)$。當系統有兩個靜止點，代表在特定的初始條件下，會往不同的靜止點逼近。當r越接近r_H，系統回歸穩定之前的路徑越發混亂，如［圖二］所示，兩個初始點距離只差0.001，結果卻趨向於不同的靜止點，也就是說，系統對於初始條件越來越敏感。

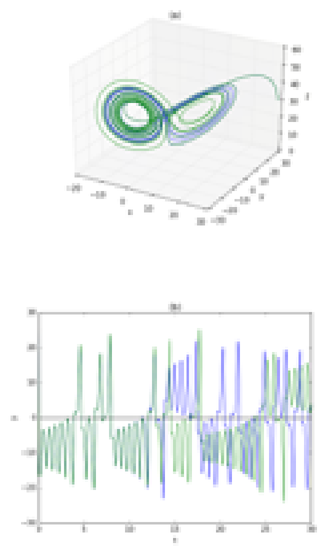
最後，當r超過r_H，C_+、C_-穩定性消失，系統不再趨近於某個靜止點，而會在C_+（或C_-）環繞幾圈，而後跳回C_-（或C_+），如此往復不休，如［圖三］所示。此時上面定義的所有混沌條件全都符合，羅倫茲系統呈現出真正的混沌性。



［圖一］
$r=0.01$, $\sigma=10$, $b=8/3$
藍：$(x,y,z)=(30,70,30)$
綠：$(x,y,z)=(30,30,30)$
(a) 可發現兩線朝原點螺旋逼近。
(b) y 隨著時間趨近於零。



［圖二］
$r=21$, $\sigma=10$, $b=8/3$
｛在此參數下，$r_H\cong 24.74$）
藍：$(x,y,z)=(30,30,30)$
綠：$(x,y,z)=(30,30,30.001)$
(a) 兩個相近初始條件最後趨近於不同的穩定點。
(b) y 隨著時間趨近於某一個穩定點。



［圖三］
$r=28$, $\sigma=10$, $b=8/3$
｛在此參數下，$r_H\cong 24.74$）
藍：$(x,y,z)=(30,30,30)$
綠：$(x,y,z)=(30,30,30.001)$
(a) 兩個初始條件隨著時間軌跡越離越遠，而且不會趨近於任何穩定的狀態。
(b) y 隨著時間沒有規律的震盪著。

羅倫茲吸引子

Lorenz attractor

之前曾經提到過，當羅倫茲系統呈現出混沌的性質時，是沒有所謂的穩定點的，又根據混沌現象的定義，系統不會走上之前的軌跡，另外，我們也可以證明系統不可能會隨著時間往無窮處趨近。那麼系統到底是呈現出怎麼樣的狀態呢？在許多的動力系統中，往往都存在著所謂的吸引子。

吸引子的概念非常簡單，就是系統的一個穩定態，而系統中大範圍分布的初始條件都傾向演進至這樣的狀態。假設我們有一個空氣中的單擺，那麼「靜止在最低點」就是這個系統的吸引子。而羅倫茲吸引子的形狀如［圖三 (a)］，在$x-z$平面上的形狀如［圖四］，仔細觀察可以發現它的形狀就像是一個蝴蝶展翅。而我們還可以透過以下這些計算，來證明這個吸引子的體積為零。

假設我們現在在系統空間中散佈著初始條件，其構成了一個體積為V的子空間，那麼我們可以推導出體積隨著時間變化的關係

$$\dot{V}=\int \nabla\cdot\vec{f}(\vec{X})\,dV \qquad (8)$$

將羅倫茲方程組構築向量方程式，並帶入上式可得到

$$\dot{V}=(-\sigma-b-1)V \qquad (9)$$

其解為 exponential decay，即

$$V(t)=V(0)e^{(-\sigma-b-1)t} \qquad (10)$$

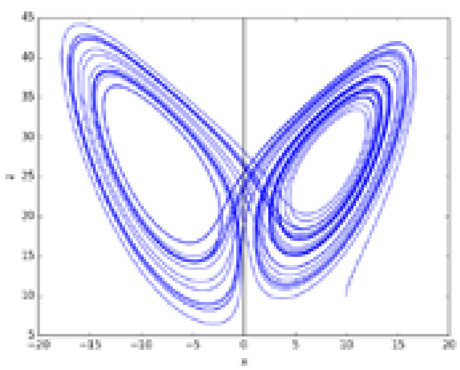
也就是體積會以指數衰減的速度收縮，直到為零。也就是說，羅倫茲吸引子的體積為零！

然而這個吸引子，不但形狀有點奇特，數學家和物理學家還發現它有更奇怪的性質，因此我們稱羅倫茲吸引子「奇異吸引子」！它到底有什麼奇怪的，讓我們要說它很「奇異」呢？這就要從他奇怪的幾何特性說起了！正常的一個吸引子可能是一個點、或一條封閉的路徑，或是一個圓環面（torus），不過有一類吸引子特別奇怪，這類吸引子具有所謂非整數的維度，在幾何學上對應到所謂的碎形（fractal）。

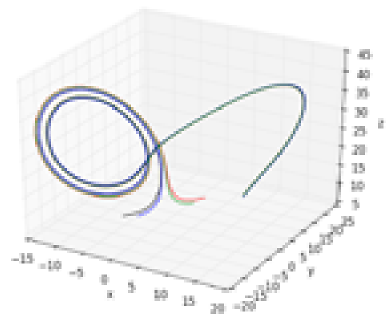
為什麼會存在非整數的維度呢，首先我們對於一個點（零維）或一條路徑（一維）應該不會有理解上的困難，但是像是羅倫茲吸引子，看起來像是兩個平面在某個交界處疊在一起而已。然而我們發現，假設我們在分岔處選擇兩條走同樣方向的軌跡，這兩條軌跡一定會在環繞吸引子數次之後分離，如［圖五］所示。事實上，只要時間夠長，我們在吸引子上永遠不可能找到兩條不分離的軌跡。而現在，假設我們把兩條相鄰的軌跡看作一個平面，則在經過一段時間後，一個平面一分為二，而分離的平面也有同樣的特性，繼續一分為二、再一分為二……。因此，我們不應該把羅倫茲吸引子看作單單是一個平面，而是由無限個平面所組合而成。而這種不斷重複的，被稱為「自相似（self-similarity）」的特性，說明其實羅倫茲吸引子是一種碎形。而碎形這種無限循環的特性，使得歐幾里得幾何（Euclidean geometry）無法描述它，因此必須用更複雜的非整數維度來完整描述它的一些特性。

再回到羅倫茲吸引子吧！它還有另外一個重要的特性，也是混沌現象的其中一個條件，那就是對初始條件的敏感性，奇異吸引子對初始條件的敏感性是指數式的，在吸引子上的小區域內，假設有兩條軌跡的初始條件相距δ，則其大致符合以下描述

$$\delta(t)\sim\delta(0)e^{\lambda t} \qquad (11)$$



［圖四］羅倫茲吸引子在 x-z 平面上的形狀示意圖。系統的狀態在左右兩邊不斷繞圈、擺盪著。



［圖五］軌跡分離示意圖：初始條件為黑（10, 10, 10）、藍（10, 10, 10.05）、綠（10, 10, 10.25）、紅（10, 10, 10.3）。可觀察到黑、藍線在交界處與紅、綠線分離，而在經過一段時間後，紅、綠線也會走向分離。

或許看到這一般人還沒什麼感覺，不過如果你是一個氣象學家，那你可能會知道這是一件非常嚴重的事！讓我們來做個假設：假如我們有一項測量天氣的技術，能夠讓測量值與實際值相差僅10^{-7}%，而根據經驗我們知道依照此測量技術我們能夠準確預測一天後的天氣。而現在這項技術大幅提升，我們能夠確保測量值與實際值相差僅10^{-9}%，也就是進步了一百倍，堪稱是世紀性的進步了！然而這時我們回頭看，會發現我們能夠多預測部分的也不過就是$\frac{2}{7}$天，甚至還不超過原來的一半！這就是天氣預報不太準的原因，就算使用了超級電腦模擬天氣現象的極限，還是只有大約一個禮拜的預報極限，更別說常常還是預報與實際天氣相距甚遠的情況了。

應用

利用混沌的同步系統 (synchronization of chaos) 進行加密傳輸

在介紹完動力學系統以及羅倫茲吸引子的性質後，現在你已經大概了解所謂的混沌系統是怎麼回事了，但是你可能會想問，這有什麼用？實際上混沌系統可以用來進行加密通訊，關鍵是利用混沌系統的同步來解密訊息。［圖六］是一個符合羅倫茲方程式的電路，當我們想要加密一個訊息時，我們利用其中的u, v, w分別輸出羅倫茲方程組的X, Y, Z；而當我們需要傳送訊息時，只需要使用裡面的混沌輸出，再將我們的訊息藏在裡面即可，如［圖七］。正是由於前面提過的混沌系統的非週期性，使混沌系統能產出夠寬的頻譜（spectrum），讓能夠放入的訊息傳輸更不受限制。

然而放入訊號是一回事，要怎麼取出訊號又是另外一回事。一般的方法肯定是無法取出來的，就算竊聽者想要竊聽，也會因為混沌現象的不可預測性而失敗。而取出我們所需要的訊號的方法，其實就是前面說的混沌系統的同步。簡單來說，我們利用此種同步方法，來還原混沌輸出的訊號，然後與訊號源相減以取回藏在裡面的訊息。那同步要怎麼做呢，讓我們考慮下面這個新的系統

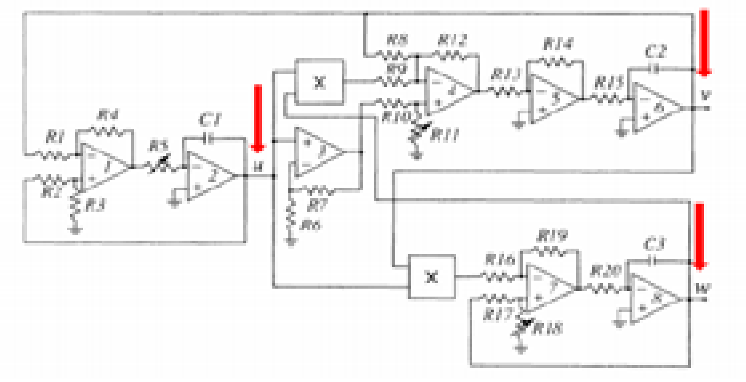
$$\dot{X}_r = \sigma(Y_r - X_r) \qquad (12)$$

$$\dot{Y}_r = rX(t) - Y_r - X(t)Z_r \qquad (13)$$

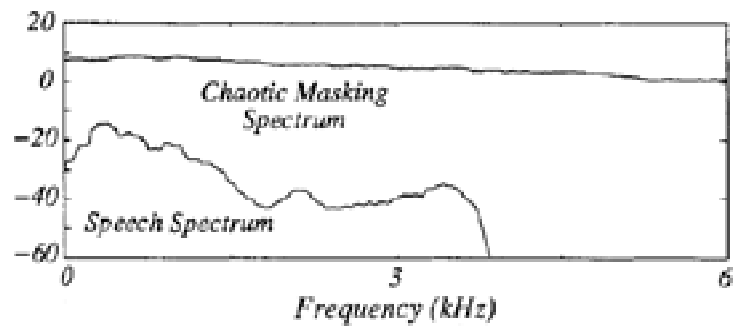
$$\dot{Z}_r = X(t)Y_r - bZ_r \qquad (14)$$

其中X_r, Y_r, Z_r為新系統的系統變數，而其中的$X(t)$則是最前面提到羅倫茲方程組中的X，而比對兩組方程式可以發現其實只是改利用接收到的訊號驅動系統而已。然而，如果我們利用之前提過的建構李亞普諾夫函數的方法分析此新系統，會發現無論此系統初始條件為何，X_r, Y_r, Z_r都會在一段時間後與原來的混沌系統完全同步！而假如我們將$X(t)$加上我們要傳輸的訊息$m(t)$，則系統也幾乎能夠與原來的混沌系統同步，於是秘密傳輸就完成了。

總而言之，利用混沌的性質掩蓋訊息並傳輸，再利用混沌同步的方式解密，這就是混沌加密傳輸技術。混沌加密通訊有許多優點，如前面提過的混沌系統的寬頻譜特性增加可傳送訊息的範圍、其類似噪音的特性，使僅靠加密過的訊息非常難以還原發送系統，因此保密性高，這些種種優點讓混沌加密通訊成為近年來通訊發展重要的技術之一。而近年來發展了更多改良技術，如利用調頻（FM）或調幅（AM）與混沌的疊加來隱藏訊息。



［圖六］羅倫茲電路圖：電路按照羅倫茲方程而設計，圖中電路中 u, v, w 分別輸出羅倫茲方程中的 X, Y, Z。[3]



［圖七］將訊號頻譜插入混沌頻譜中，達到隱藏訊號的目的。圖中混沌訊號的寬頻譜有助於隱藏信號。[3]

結語

混沌系統乃至於非線性系統是現在物理界研究的大方向之一，許許多多的科學家，無論是氣象學家、物理學家，抑或是數學家都有人在研究它。尤其是現在的物理界，在各個領域都走向極高（極高能量、極快速度）或極低（極低溫、奈米科技）兩個極端時，非線性物理嘗試在我們的生活周遭找尋可用的研究素材，並發掘其中的物理之美，如果你是喜歡從生活中找尋靈感，並且樂於運用各種不同方法分析研究的話，歡迎加入這個領域！

參考資料

[1] Strogatz, S. H. (1994). Nonlinear Dynamics and Chaos: Addison-Wesley, Reading, MA.

[2] E.N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow J. Atmos. Sci., 20 (1983), p. 130

[3] Kevin M. Cuomo and Alan V. Oppenheim. Circuit Implementation of Synchronized Chaos with Applications to Communications. Phys. Rev. Lett. 71, 65 – Published 5 July 1993

[4] Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. Phys. Rev. Lett. 64, 821 – Published 19 February 1990

[5] 柏山、朱义胜 (2007)。一种改進的混沌掩盖技術。电子与信息学報。

[6] https://www.wikipedia.org/

[7] http://mathworld.wolfram.com/LorenzAttractor.html

[8] http://stokeslet.ucsd.edu/mae210cdocs/lorenzderivation.pdf